MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Controlabilidade e estratégias ótimas[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] A. Leitão [Seção 3.5].

Nesta aula discutiremos **estratégias ótimas** de controle para sistemas de estado. Vamos encontrar uma estratégia que evolua o estado inicial $x(0) = x_0$ ao estado $x(T) = x_T$ para $T > 0$ e que seja ótima num sentido **particular**.

- Trataremos sistemas de controle **autônomos** da forma

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad (*)$$

  onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ o **controle**, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ matrizes constantes.

- Lembramos que $(*)$ é completamente controlável se e só se o **posto** da matriz

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times nr} \tag{1}$$

  é n.

Teorema

Considere o seguinte sistema de controle de estado

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad (*)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ o **controle**, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ matrizes constantes. Suponha que $(*)$ é completamente controlável. Seja $V_T = \int_0^T e^{A(T-s)}BB'e^{A'(T-s)}\,ds \in \mathbb{R}^{n\times n}$. **Então**

a) O controle $u_*(t) = -B'e^{A'(T-t)}V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)$ define um **estado** $x(t)$ que evolui a condição inicial $x(0) = x_0$ ao estado $x(T) = x_T$ onde $t \in [0,T]$.

b) Entre todos os controles **admissíveis**[a] u, u_* é aquele que minimiza o funcional

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|^2\,dt$$

e o valor mínimo atingido por J é $J(u_*) = V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)\cdot(e^{AT}x_0 - x_T)$.

[a] Nesse caso u deve ser uma função vetorial cuja a **fórmula** da variação das constantes seja bem definida com $\int_0^T |u(t)|^2 dt < \infty$. Além disso, o controle u define um estado x que evolui a condição inicial x_0 ao estado x_T.

Dem. Inicialmente **veremos** a afirmação $a)$. Pela fórmula da variação das constantes temos que

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} B\, u(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Assim, tomando $u(t) = u_*(t) = -B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)$ temos **que**

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 - \int_0^t e^{A(t-s)} B\, B' e^{A'(T-s)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)\, ds \\ &= e^{At}x_0 - \left(\int_0^t e^{A(t-s)} B\, B' e^{A'(T-s)} ds \right) V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \end{aligned}$$

Logo

$$x(T) = e^{AT}x_0 - V_T V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) = x_T.$$

Mostramos agora que

$$J(u_*) = V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot (e^{AT}x_0 - x_T).$$

Temos que

$$\begin{aligned}
J(u_*) &= \int_0^T |u_*(t)|^2 \, dt \\
&= \int_0^T B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \, dt \\
&= \int_0^T V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot (B' e^{A'(T-t)})' B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \, dt \\
&= \int_0^T V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot e^{A(T-t)} B B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \, dt \\
&= V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot \left(\int_0^T e^{A(T-t)} B B' e^{A'(T-t)} \, dt \right) V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \\
&= V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot V_T V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \\
&= V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \cdot (e^{AT}x_0 - x_T).
\end{aligned}$$

Concluímos agora a prova do item b) mostrando que u_* é controle **mínimo**. Veja que se $u(t)$ é um **outro** controle qualquer que evolui x_0 a x_T em $[0,T]$, então

$$\begin{aligned}
\int_0^T u(t)\cdot u_*(t)\,dt &= -\int_0^T u(t)\cdot B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)\,dt \\
&= -\int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)\cdot V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)\,dt \\
&= -\int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)\,dt\cdot V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \\
&= (e^{AT}x_0 - x_T)\cdot V_T^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \\
&= \int_0^T |u_*(t)|^2\,dt
\end{aligned}$$

pela **fórmula** da variação das constantes.

Por outro **lado**,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |u_*(t)|^2\,dt + \int_0^T (u(t)-u_*(t))\cdot(u(t)-u_*(t))\,dt \\
&= 2\int_0^T |u_*(t)|^2\,dt + \int_0^T |u(t)|^2 dt - 2\int_0^T u(t)\cdot u_*(t)\,dt \\
&= 2\int_0^T |u_*(t)|^2\,dt + \int_0^T |u(t)|^2 dt - 2\int_0^T |u_*(t)|^2\,dt \\
&= \int_0^T |u(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt &= \int_0^T |u_*(t)|^2\,dt + \int_0^T |u(t)-u_*(t)|^2\,dt \\
&\geq \int_0^T |u_*(t)|^2\,dt = J(u_*)
\end{aligned}$$

o que prova o t**eorema**. $\square$

Controle ótimo

O teorema anterior pode ser interpretado como a **estratégia** de controle u_* que é solução do problema de otimização

$$\text{Minimizar} \quad \int_0^T |u(t)|^2\, dt$$

sujeito a:

$$i) \quad u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^r);$$

$$ii) \quad \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \quad \text{com} \quad x(0) = x_0 \ \text{ e } \ x(T) = x_T.$$

- Veja que na demonstração se usa **fortemente** a estrutura fornecida por espaços com produto interno.
- **Verifique** que a matriz $V_T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível.

Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a posição de um corpo num instante t sujeito a um **força** f. Suponha que o corpo possui **massa** unitária, então temos

$$\ddot{x}(t) = f(t)$$

i) x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como **controle**. Se $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos o seguinte sistema de controle

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f \\ x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{2}$$

ii) Já **vimos** que este sistema é controlável e observável. Determinamos agora o controle u cujo estado $x(t)$ **evolui** $x(0) = x_0$ a $x(T) = 0$ de maneira ótima.

⋆ Pelo teorema demostrado, **basta** calcular u_* usando a expressão

$$u_*(t) = -B' e^{A'(T-t)} V_T^{-1} (e^{AT} x_0 - x_T)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dados pelo **sistema** de estado (2) e

$$V_T = \int_0^T e^{A(T-s)} B B' e^{A'(T-s)} \, ds.$$