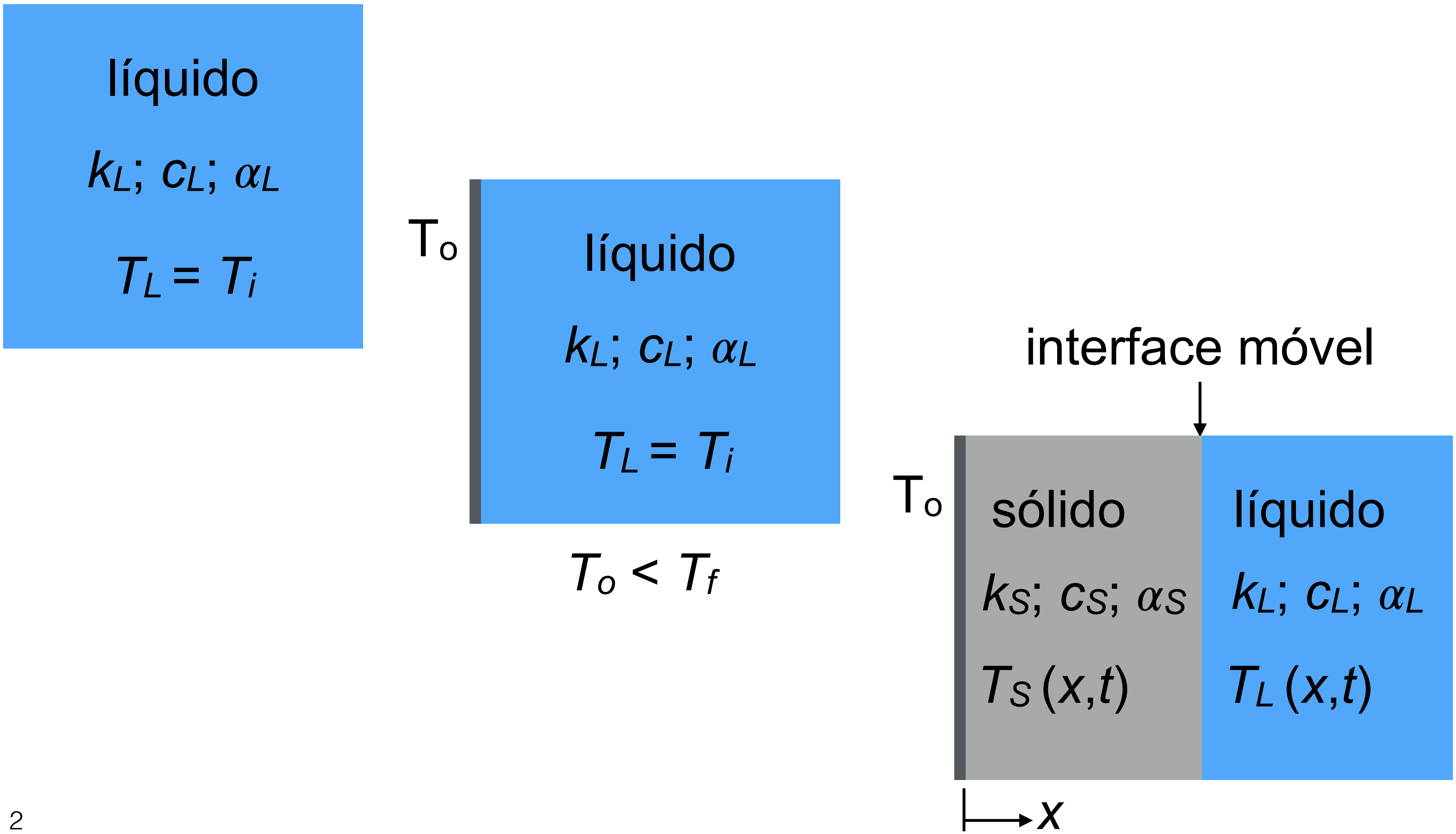
# Transferência de calor e massa em sistemas biológicas

## Criocirurgia

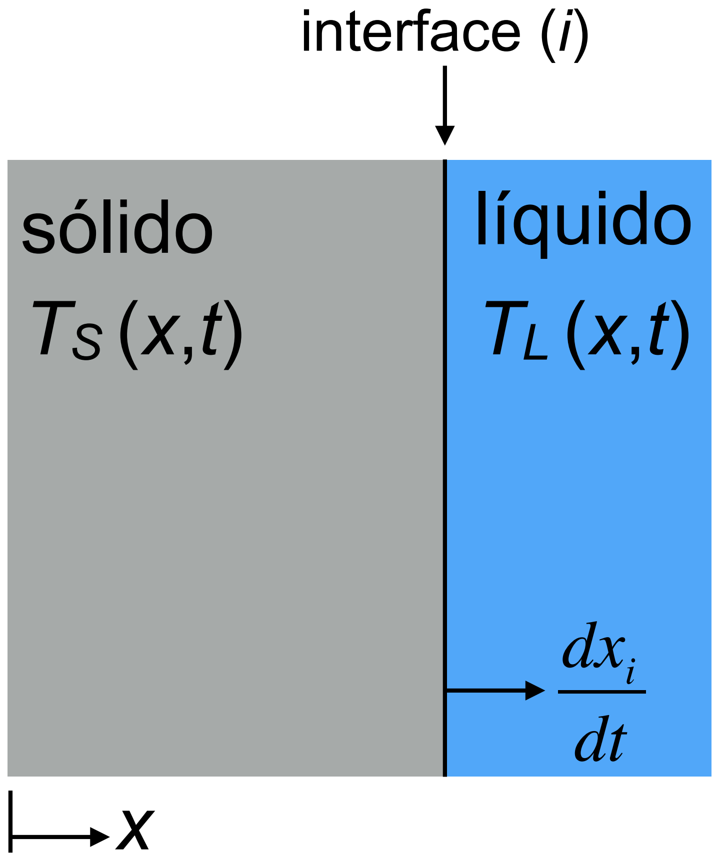
## Problema 1: parede plana a $T_o$, sem circulação e geração



**Hipóteses:**

1. As propriedades em cada fase são uniformes e permanecem constantes;
2. O movimento na fase líquida oriundo da diferença de densidade é desprezível;
3. A condução de calor é unidimensional;
4. A geração de energia térmica é desprezível;
5. A transferência de calor entre sangue e tecido é desprezível;
6. O processo se dá a pressão constante.

# Condições de contorno na interface




EDP:

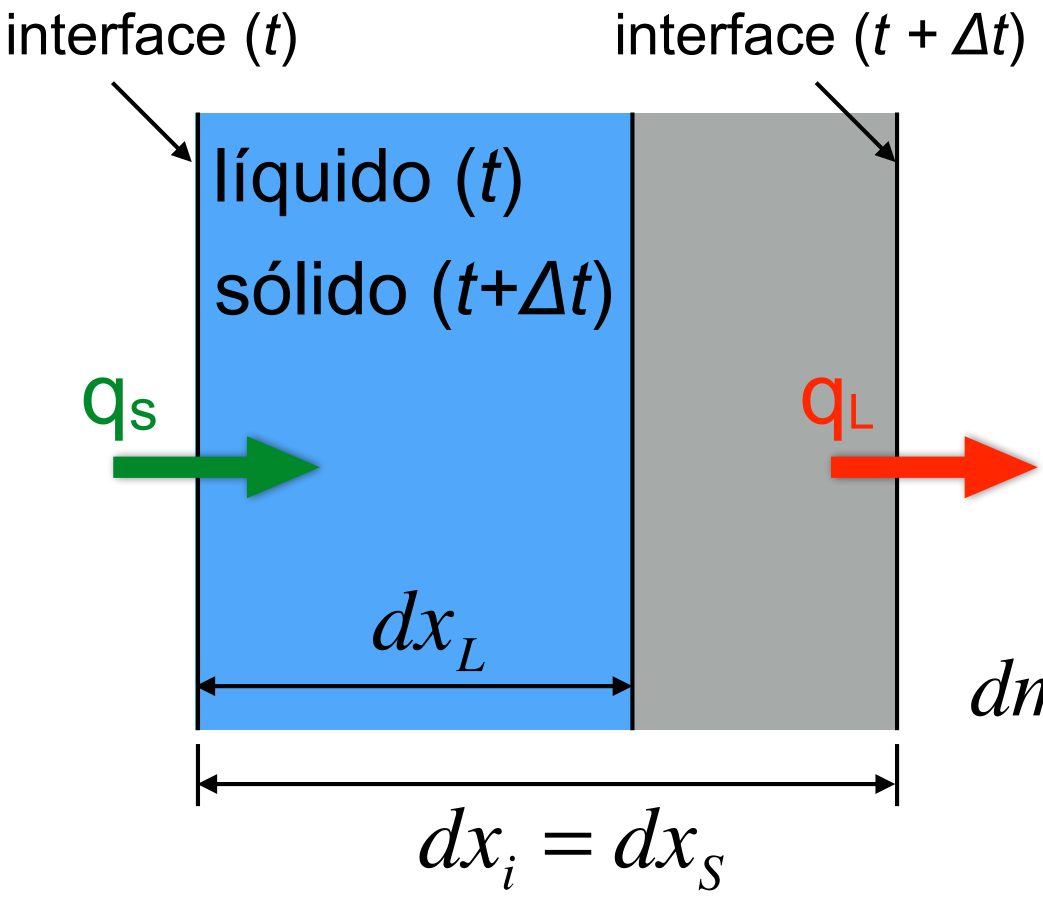
$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial T_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \qquad 0 < x < x_i, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha_L}\frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \qquad x > x_i, \qquad (2)$$

# Condições de contorno na interface



Elemento líquido infinitesimal que se solidificará




Continuidade da temperatura:

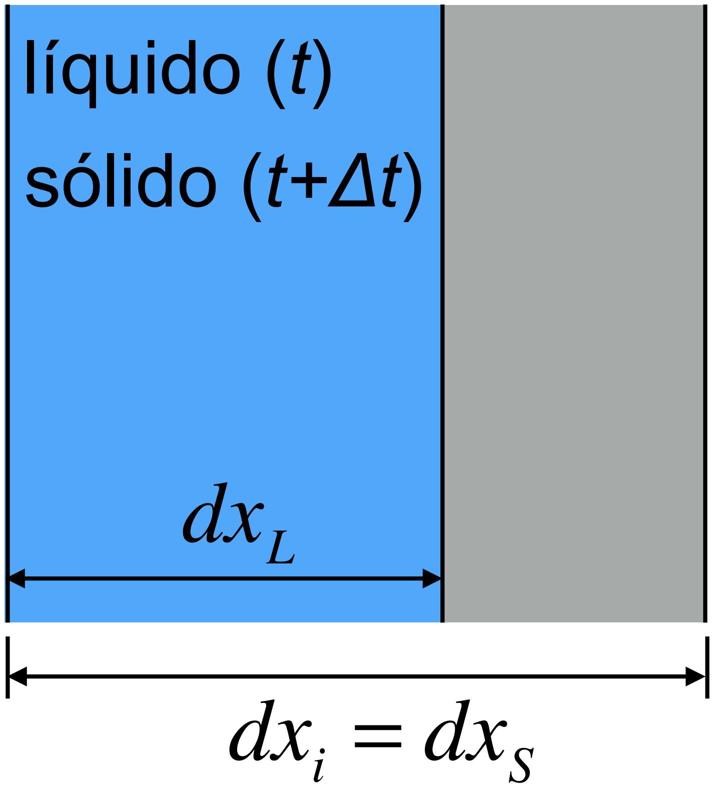
$$T_s(x_i,t) = T_L(x_i,t) = T_f \qquad (3)$$

1ª lei para o sistema:

$$dm_S(u_S - u_L) = (q_s - q_L)dt - pd\forall$$

# Condições de contorno na interface






1ª lei para o sistema:

$$dm_S(u_S - u_L) = (q_S - q_L)dt - pd\forall$$

$$dm_S(u_S - u_L) = (q_S - q_L)dt - p\,dm_S(v_S - v_L)$$

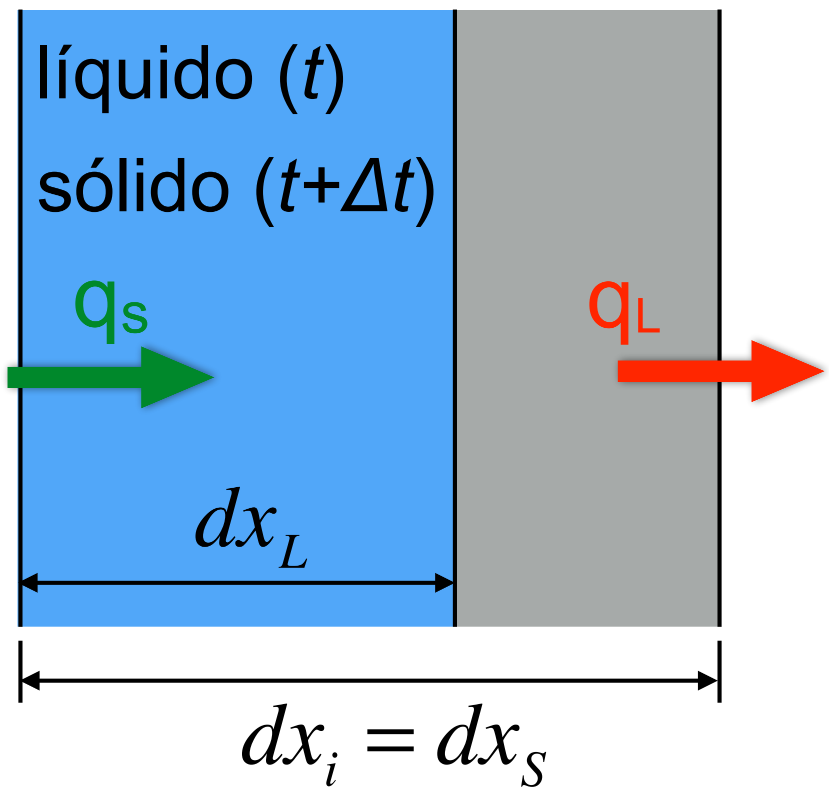
$$dm_S\left[(u_S + pv_S) - (u_L + pv_L)\right] = (q_S - q_L)dt$$

$$\frac{dm_s}{dt}(h_S - h_L) = q_S - q_L \qquad (4)$$

# Condições de contorno na interface



$$\frac{dm_s}{dt}\left(h_S - h_L\right) = q_S - q_L \qquad (4)$$




Lei de Fourier:

$$q_S = -k_S A \frac{\partial T_S\left(x_i, t\right)}{\partial x} \qquad (5)$$

$$q_L = -k_L A \frac{\partial T_L\left(x_i, t\right)}{\partial x} \qquad (6)$$

# Condições de contorno na interface



Combinando as equações 4, 5 e 6:

$$\frac{dm_S}{dt}(h_S - h_L) = -k_S A \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} + k_L A \frac{\partial T_L(x_i,t)}{\partial x}$$

$$\rho_S A \frac{dx_i}{dt}(h_S - h_L) = -k_S A \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} + k_L A \frac{\partial T_L(x_i,t)}{\partial x}$$

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt}(h_L - h_S) = k_S \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L(x_i,t)}{\partial x} \qquad (7)$$

# Condições de contorno na interface



$$\rho_S \frac{dx_i}{dt}\left(h_L - h_S\right) = k_S \frac{\partial T_S\left(x_i, t\right)}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L\left(x_i, t\right)}{\partial x} \qquad (7)$$

A eq. 7 é válida na solidificação e na fusão;

Na fusão $\rho_S$ deve ser substituída por $\rho_L$;

$h_L - h_S = h_{SL}$ é a entalpia de fusão.

# Equações

EDP:

$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial T_S}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \qquad 0 \le x < x_i, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\alpha_L}\frac{\partial T_L}{\partial t}=\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \qquad x > x_i, \qquad (2)$$

C.C.:

$$T_S\left(x_i,t\right)=T_L\left(x_i,t\right)=T_f \qquad (3)$$

$$\rho_S\frac{dx_i}{dt}h_{SL}=k_S\frac{\partial T_S\left(x_i,t\right)}{\partial x}-k_L\frac{\partial T_L\left(x_i,t\right)}{\partial x} \qquad (7)$$

# Forma adimensional das equações



Variáveis adimensionais:

$$\theta_S = \frac{T_S - T_f}{T_f - T_o}$$

$$\theta_L = \frac{k_L}{k_S}\frac{T_L - T_f}{T_f - T_o}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$\tau = Ste\frac{\alpha_S}{L^2}t$$

Número de Stefan:

$$Ste = \frac{c_s\left(T_f - T_o\right)}{h_{SL}}$$

# Forma adimensional das equações

Variáveis adimensionais:

$$d\theta_S = \frac{dT_S}{T_f - T_o} \qquad \Rightarrow dT_S = \left(T_f - T_o\right) d\theta_S$$

$$d\theta_L = \frac{k_L}{k_S}\frac{dT_L}{T_f - T_o} \qquad \Rightarrow dT_L = \frac{k_S}{k_L}\left(T_f - T_o\right) d\theta_L$$

$$d\xi = \frac{dx}{L} \qquad \Rightarrow dx = L d\xi$$

$$d\xi^2 = \frac{dx^2}{L} \qquad \Rightarrow dx^2 = L^2 d\xi^2$$

$$d\tau = Ste\frac{\alpha_S}{L^2} dt \qquad \Rightarrow dt = \frac{1}{Ste}\frac{L^2}{\alpha_S} d\tau$$

## Adimensionalização das EDPs:

$$\partial T_S = \left(T_f - T_o\right)\partial\theta_S$$

$$\partial T_L = \frac{k_S}{k_L}\left(T_f - T_o\right)\partial\theta_L$$

$$\partial x = L\partial\xi$$

$$\partial x^2 = L^2\partial\xi^2$$

$$\partial t = \frac{1}{Ste}\frac{L^2}{\alpha_S}\partial\tau$$

$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial T_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \quad 0 \le x < x_i, \quad (1)$$

$$Ste\frac{\alpha_S}{\alpha_S}\frac{\left(T_f - T_o\right)}{L^2}\frac{\partial\theta_S}{\partial\tau} = \frac{\left(T_f - T_o\right)}{L^2}\frac{\partial^2\theta_S}{\partial\xi^2} \quad 0 < \xi < \xi_i$$

$$Ste\frac{\partial\theta_S}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_S}{\partial\xi^2} \quad 0 \le \xi < \xi_i, \quad (1a)$$

# Forma adimensional das equações

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Adimensionalização das EDPs:

$$\partial T_S = \left(T_f - T_o\right)\partial\theta_S$$

$$\partial T_L = \frac{k_S}{k_L}\left(T_f - T_o\right)\partial\theta_L$$

$$\partial x = L\partial\xi$$

$$\partial x^2 = L^2\partial\xi^2$$

$$\partial t = \frac{1}{Ste}\frac{L^2}{\alpha_S}\partial\tau$$

$$\frac{1}{\alpha_L}\frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \quad x > x_i, \qquad (2)$$

$$Ste\frac{k_S}{k_L}\frac{\alpha_S}{\alpha_L}\frac{\left(T_f - T_o\right)}{L^2}\frac{\partial\theta_L}{\partial\tau} = \frac{k_S}{k_L}\frac{\left(T_f - T_o\right)}{L^2}\frac{\partial^2\theta_L}{\partial\xi^2} \quad \xi > \xi_i$$

$$Ste\frac{\partial\theta_L}{\partial\tau} = \frac{\alpha_L}{\alpha_S}\frac{\partial^2\theta_L}{\partial\xi^2} \quad \xi > \xi_i, \qquad (2a)$$

# Forma adimensional das equações

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L(x_i,t)}{\partial x} \quad (7)$$

$$Ste\,\alpha_S \rho_S \frac{L}{L^2} \frac{d\xi_i}{d\tau} h_{SL} = k_S \frac{(T_f - T_o)}{L} \frac{\partial \theta_S(\xi_i,t)}{\partial \xi} - \cancel{k_L} \frac{k_S}{\cancel{k_L}} \frac{(T_f - T_o)}{L} \frac{\partial \theta_L(\xi_i,t)}{\partial \xi}$$

$$\frac{Ste\, h_{SL} \alpha_S}{c_s (T_f - T_o)} \frac{c_s \rho_S}{k_S} \frac{d\xi_i}{d\tau} = \frac{\partial \theta_S(\xi_i,t)}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta_L(\xi_i,t)}{\partial \xi}$$

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = \frac{\partial \theta_S(\xi_i,t)}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta_L(\xi_i,t)}{\partial \xi}, \quad (7a)$$

# Forma adimensional das equações



EDPs:

$$Ste\frac{\partial\theta_S}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta_S}{\partial\xi^2}\quad 0<\xi<\xi_i,\qquad (1a)$$

$$Ste\frac{\partial\theta_L}{\partial\tau}=\frac{\alpha_L}{\alpha_S}\frac{\partial^2\theta_L}{\partial\xi^2}\quad \xi>\xi_i,\qquad (2a)$$

C.C.:

$$\theta_S\left(\xi_i,\tau\right)=\frac{k_S}{k_L}\theta_L\left(\xi_i,\tau\right)=0,\qquad (3a)$$

$$\frac{d\xi_i}{d\tau}=\frac{\partial\theta_S\left(\xi_i,t\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial\theta_L\left(\xi_i,t\right)}{\partial\xi},\qquad (7a)$$

# Simplificação: regime quase-permanente



Para $Ste \rightarrow 0$: $$Ste = \frac{c_s\left(T_f - T_o\right)}{h_{SL}}$$

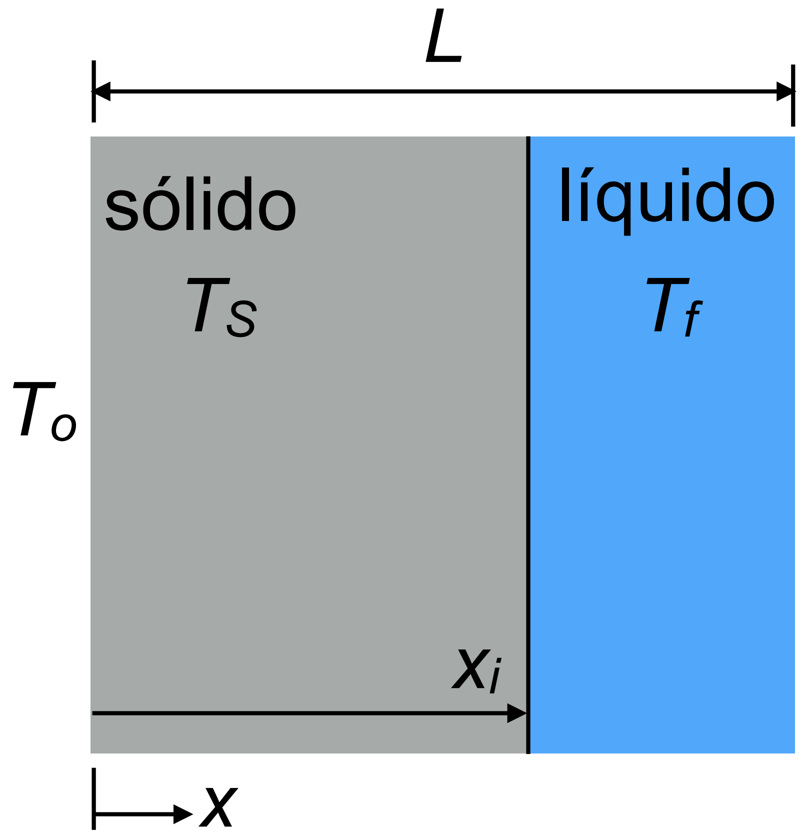
$$Ste\frac{\partial \theta_S}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \xi^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial \xi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \theta_S}{d\xi^2} = 0$$

$$Ste\frac{\partial \theta_L}{\partial \tau} = \frac{\alpha_L}{\alpha_S}\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \xi^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial \xi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \theta_L}{d\xi^2} = 0$$

# Ex. 1 - solidificação de um bloco a $T_f$



Determinar o tempo necessário para solidificar todo o bloco de espessura L.



# Ex. 1 - solidificação de um bloco a $T_f$



EDOs:

$$\frac{d^2T_S}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2T_L}{dx^2} = 0$$

CCs e CI:

$$T_S(0,t) = T_o \qquad (1)$$

$$T_S(x_i,t) = T_f \qquad (2)$$

$$T_L(x_i,t) = T_f \qquad (3)$$

$$T_L(L,t) = T_f \qquad (4)$$

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} - k_L \frac{\partial T_L(x_i,t)}{\partial x} \qquad (5)$$

Integração das EDOs:

$$\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = 0 \qquad T_S = Ax + B$$

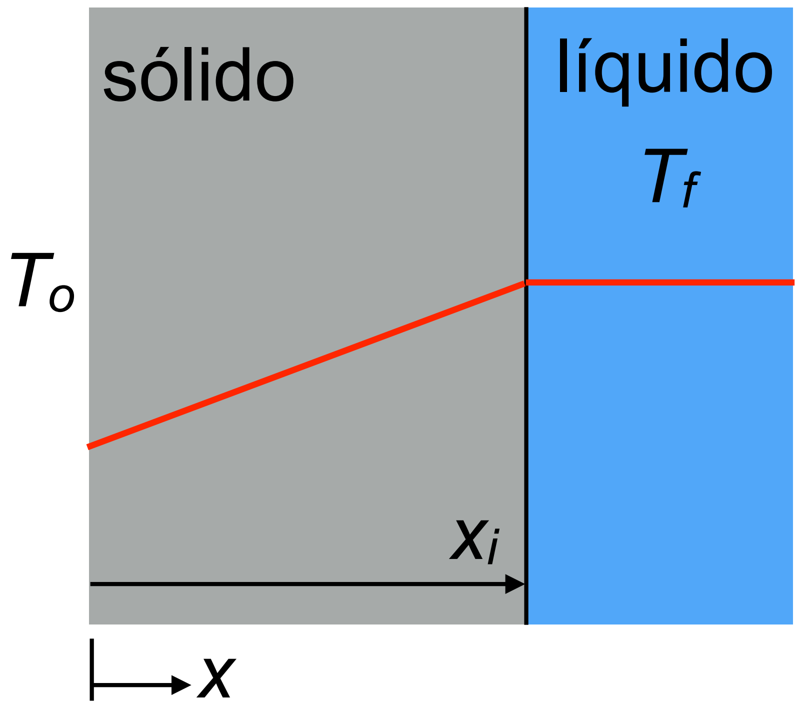
$$\frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} = 0 \qquad T_L = Cx + D$$

de (1) e (2):

$$T_S(x,t) = \left(T_f - T_o\right)\frac{x}{x_i} + T_o \quad (6)$$

de (3) e (4):

$$T_L(x,t) = T_f \quad (7)$$



# Ex. 1 - solidificação de um bloco a $T_f$

Determinação da frente de congelamento:

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{dT_S(x_i,t)}{\partial x} - k_L \frac{dT_L(x_i,t)}{\partial x} \quad (5)$$

Substituindo (6) e (7) em (5), obtemos:

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{T_f - T_o}{x_i} - k_L 0 \quad \longrightarrow \quad x_i dx_i = k_S \frac{T_f - T_o}{\rho_S h_{SL}} dt$$

$$\int_0^{x_i} x_i\, dx_i = \int_0^t k_S \frac{T_f - T_o}{\rho_S h_{SL}} dt \quad \longrightarrow \quad x_i = \sqrt{\frac{2k_S\left(T_f - T_o\right)t}{\rho_S h_{SL}}}$$

# Ex. 1 - solidificação de um bloco a $T_f$



Para completa solidificação, $x_i = L$:

$$L = \sqrt{\frac{2k_S\left(T_f - T_o\right)t^*}{\rho_S h_{SL}}}$$

$$\rightarrow \quad t^* = \frac{\rho_S h_{SL} L^2}{2k_S\left(T_f - T_o\right)}$$

# Solução exata: Stefan

Solução para um sólido semi-infinito.

## Fase sólida:

$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial T_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \quad 0 \le x < x_i, \quad (1)$$

$$T_S(0,t) = T_o \quad (2)$$

$$T_S(x_i,t) = T_f \quad (3)$$

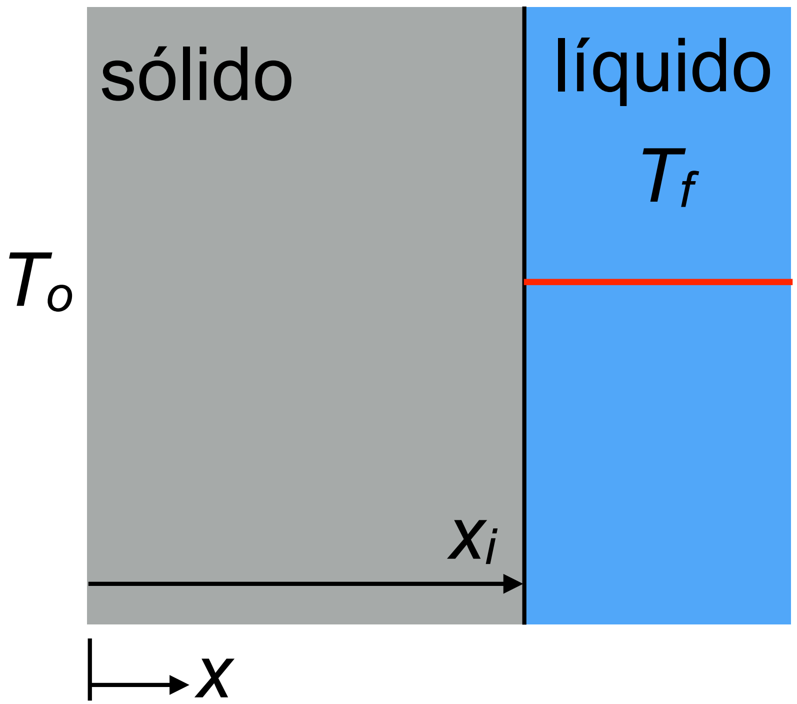
## Fase líquida:

$$T_L(x,t) = T_f \quad (4)$$

## Interface:

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} \quad (5)$$

$$x_i(0) = 0 \quad (6)$$



# Solução exata: Stefan



Solução por similaridade, η = η(*x*,*t*)

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha_S t}}, \quad T_S = T_S(\eta)$$

Utilizando a variável de similaridade transformamos a Eq. (1):

$$\frac{d^2T_S}{dx^2} + 2\eta\frac{dT_S}{d\eta} = 0 \quad \rightarrow \quad T_S = A\,erf(\eta) + B$$

Determinamos as constantes pelas condições (2) e (3):

$$T_S(0,t) = T_o \quad \rightarrow \quad \eta = 0 \quad \rightarrow \quad erf(\eta) = 0 \quad \rightarrow \quad B = T_o$$

$$T_S(x_i,t) = T_f \quad \rightarrow \quad T_f = A\,erf\left(\frac{x_i}{\sqrt{4\alpha_S t}}\right) + T_o$$

# Solução exata: Stefan



$$T_f = Aerf\left(\frac{x_i}{\sqrt{4\alpha_S t}}\right) + T_o$$

Note que, como não conhecemos $x_i$, não podemos determinar $A$!

Note, entretanto, que para qualquer $x_i$, *erf* () deve ser constante, logo:

$$x_i \propto \sqrt{t} \rightarrow x_i = \lambda\sqrt{4\alpha_S t}$$

Podemos escrever:

$$T_f = Aerf(\lambda) + T_o \rightarrow A = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)}$$

# Solução exata: Stefan



Assim, a solução para a EDP (1) é:

$$T_S = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} erf\left( \frac{x}{\sqrt{4\alpha_S t}} \right) + T_o$$

A constante $\lambda$ pode ser determinada a partir de (5):

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{\partial T_S(x_i, t)}{\partial x} \quad (5)$$

Precisamos determinar a derivada que aparece em (5):

$$\frac{\partial T_S}{\partial x} = \frac{\partial T_S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

# Solução exata: Stefan



$$T_S = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha_S t}}\right) + T_o$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial x} = \frac{\partial T_S}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T_S}{\partial x} = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} \frac{\partial(erf\,\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial T_S}{\partial x} = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

Calculando em $x_i$ e $t$ :

$$\frac{\partial T_S(x_i,t)}{\partial x} = \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

# Solução exata: Stefan



Temos, então:

$$\rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{\partial T_S\left(x_i,t\right)}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_S\left(x_i,t\right)}{\partial x} = \frac{T_f - T_o}{erf\left(\lambda\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

$$\rightarrow \quad \rho_S \frac{dx_i}{dt} h_{SL} = k_S \frac{T_f - T_o}{erf\left(\lambda\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

$$\rightarrow \quad \rho_S \frac{d\left(\lambda\sqrt{4\alpha_S t}\right)}{dt} h_{SL} = k_S \frac{T_f - T_o}{erf\left(\lambda\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

$$\rightarrow \quad \rho_S \lambda \frac{\sqrt{4\alpha_S}}{2\sqrt{t}} h_{SL} = k_S \frac{T_f - T_o}{erf\left(\lambda\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

# Solução exata: Stefan



Devemos isolar λ da equação:

$$\rho_S \lambda \frac{\sqrt{4\alpha_S}}{2\sqrt{t}} h_{SL} = k_S \frac{T_f - T_o}{erf(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_S t}}$$

$$\lambda erf(\lambda) e^{\lambda^2} = \frac{c_S (T_f - T_o)}{h_{SL}\sqrt{\pi}}, \qquad (7)$$

$$\lambda erf(\lambda) e^{\lambda^2} = \frac{c_S (T_f - T_o)}{h_{SL}\sqrt{\pi}}, \qquad (7)$$

A Eq. (7) não pode ser resolvida explicitamente. Podemos obter uma solução aproximada para pequenos λ:

$$e^{\lambda^2} = 1 + \cancel{\frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^4}{2!}} \cdots \approx 1$$

$$erf\,\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda - \cancel{\frac{\lambda^3}{3 \cdot 1!} + \frac{\lambda^5}{5 \cdot 2!}} \cdots\right) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\lambda$$

Substituindo em (7):

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\lambda^2 = \frac{c_S (T_f - T_o)}{h_{SL}\sqrt{\pi}} \quad \rightarrow \quad \lambda = \sqrt{\frac{c_S (T_f - T_o)}{2 h_{SL}}}$$

# Solução exata: Stefan



$$\lambda = \sqrt{\frac{c_S\left(T_f - T_o\right)}{2h_{SL}}}$$

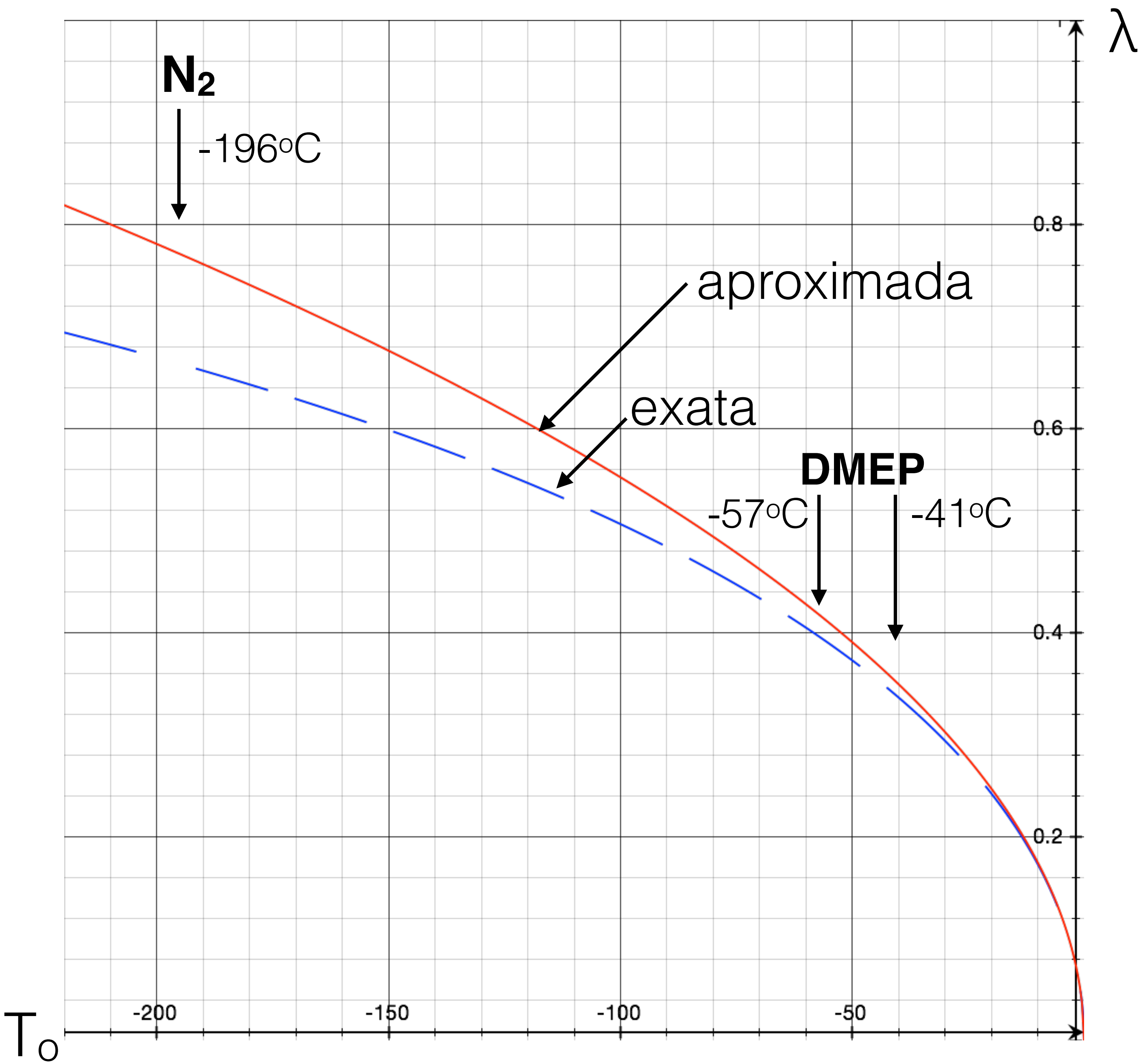
Combinando com $x_i = \lambda\sqrt{4\alpha_S t}$

$$x_i = \sqrt{\frac{2k_S\left(T_f - T_o\right)}{\rho_S h_{SL}}t}$$

Para grandes valores de λ não vale a solução acima. Nesse caso podemos usar o gráfico da página seguinte.

# Stefan: valor de λ

Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo




DMEP = dimetil-éter propano