EXERCÍCIOS PARA ENTREGAR - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

Data de entrega: dia 17 de dezembro de 2020.
Resolva individualmente. Não aceitarei listas de exercícios iguais.

1. Equação de Laplace

Neste exercício Φ denota a solução fundamental do operador de Laplace $-\Delta$ e $n \geq 2$.
Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1, $f \in C(\overline{U})$ e $g \in C(\partial U)$. Considere a seguinte equação:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x) & = & f(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) & = & g(x), & x \in \partial U \end{array} . \tag{1.1}$$

a) Use o teorema da divergência e prove que uma condição necessária para que exista uma solução $u \in C^2(\overline{U})$ da Equação (1.1) é que $\int_U f(x)dx = -\int_{\partial U} g(x)dS(x)$. (Dica: $\Delta u = \nabla . \nabla u$)

b) Seja $x \in U$. Mostre que $\int_{\partial U} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(y-x)dS(y) = -1$. (Dica: Seja $\overline{B(x,r)} \subset U$. Use o resultado feito em sala de aula $\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(y-x)dS(y) = -1$, em que ν_y aponta para fora de $\partial B(x,r)$, e o teorema da divergência para $y \in U \backslash \overline{B(x,r)} \mapsto \Delta\Phi(y-x) = 0$)

c) Seja $x \in U$. Use o item $b)$ e mostre que o problema abaixo satisfaz a condição necessária do item $a)$ para existência de solução

$$\begin{array}{rcll} -\Delta \phi^x(y) & = & 0, & y \in U \\ \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) & = & \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) + \frac{1}{|\partial U|}, & y \in \partial U \end{array} . \tag{1.2}$$

d) Suponha que para cada $x \in U$ exista uma solução do Problema (1.2). Mostre que se $u \in C^2(\overline{U})$ for uma solução de (1.1), então

$$\int_U \phi^x(y)f(y)dy + \int_{\partial U} \phi^x(y)g(y)dS(y) = \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)dS(y) + \frac{1}{|\partial U|}\int_{\partial U} u(y)dS(y).$$

(Dica: use a segunda identidade de Green para as funções u e ϕ^x)

e) Conclua que se $u \in C^2(\overline{U})$ for uma solução de (1.1), então

$$u(x) = \int_{\partial U} G_N(x,y)g(y)dS(y) + \int_U G_N(x,y)f(y)dy + \frac{1}{|\partial U|}\int_{\partial U} u(y)dS(y),$$

em que $G_N(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y)$. A função G_N é a função de Green do problema de Neumann. (Dica: use a Proposição 1 do formulário)

Observação: As soluções das equações (1.1) e (1.2) não são únicas. Por exemplo, suponha que u é uma solução da Equação (1.1) e $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Neste caso $v(x) = u(x) + C$ também é uma solução. Se escolhermos $C = -⨍_U u(x)dx$, então a solução v satisfaz $\int_U v(x)dx = 0$. Com esta condição, pode-se provar que a solução é única. Da mesma forma, a função ϕ^x não é única. No entanto, supondo que $\int_U \phi^x(y)dy = 0$, obtemos unicidade. Essas observações, embora relevantes, não são necessárias nas contas acima.

Formulário.

Proposição 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $u \in C^2(\overline{U})$. Logo*

$$u(x) = \int_{\partial U}\left(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\right)dS(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y)dy.$$

Teorema 2. *(Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $u \in C^1\left(\overline{U};\mathbb{R}^n\right)$. Logo*

$$\int_U \nabla . u(y)dy = \int_{\partial U} u(y).\nu(y)dS(y), \tag{1.3}$$

em que $\nu(y) \in \mathbb{R}^n$ é a normal que aponta para fora de U no ponto $y \in \partial U$.

Proposição 3. *(2° identidade de Green) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $f, g \in C^2(\overline{U})$. Logo*

$$\int_U (f(y)\Delta g(y) - g(y)\Delta f(y))\,dy = \int_{\partial U}\left(f(y)\frac{\partial g}{\partial \nu}(y) - g(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\right)dS(y).$$

2. Equação do calor.

Considere a seguinte equação:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & x \in]0,\pi[, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) & = & \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x), & x \in]0,\pi[\end{array} . \tag{2.1}$$

O objetivo é achar uma expressão da solução da Equação (2.1) usando o método de separação de variáveis. (Não faremos a demonstração rigorosa de que a expressão obtida de fato é solução).

a) Ache todas as soluções do tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$ da equação abaixo:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & x \in]0,\pi[, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) & = & \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, & t > 0 \end{array} .$$

(Dica: Primeiro ache as soluções $u(x,t) = X(x)T(t)$ de $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ e depois use as condições de contorno $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$)

b) Some todas as soluções obtidas no item a) e conclua que

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx) . \tag{2.2}$$

c) Para $t = 0$, multiplique a Equação (2.2) por $\cos(mx)$, $m \in \{0, 1, ...\}$, e integre tudo de 0 até π. Conclua que

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \cos(my) dy.$$

Faça as contas de maneira formal, isto é, não precisa justificar a troca de ordem entre a integral e a somatória.

Formulário. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

3. Equação de Onda.

Consideremos a equação abaixo para g e h em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & = & \Delta u(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\\ u(x,0) & = & g(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & h(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Vamos definir

$$\begin{array}{rcl} U(x,r,t) & := & ⨍_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \\ G(x,r) & := & ⨍_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y) \\ H(x,r) & := & ⨍_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y) \end{array}$$

Vimos em sala de aula que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, U satisfaz a Equação de Euler-Poisson-Darboux.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,r,t) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,r,t) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t), & r \geq 0, t \geq 0 \\ U(x,r,0) = G(x,r), \frac{\partial U}{\partial t}(x,r,0) = H(x,r), & r \geq 0 \end{array}$$

a) Suponha que $n = 5$ e defina $\tilde{U}(x,r,t) = r^2 \frac{\partial U}{\partial r}(x,r,t) + 3rU(x,r,t)$. Mostre que $\tilde{U}$ é solução da equação abaixo

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}(x,r,t) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial r^2}(x,r,t), \quad r \geq 0,\ t \geq 0\ .$$

(Dica: Use a Equação de Euler-Poisson-Darboux para $n = 5$)

b) Determine as funções $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ dadas por $\tilde{G}(x,r) := \tilde{U}(x,r,0)$ e $\tilde{H}(x,r) := \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}(x,r,0)$ em termos de G e H.

c) Mostre que

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{3r} = \left(\frac{1}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right)H(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{3}t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\right)G(x,t).$$

(Dica: A função $\tilde{U}$ satisfaz a equação da onda na semireta. Use a solução para $t \geq r \geq 0$)

d) Descreva rapidamente como você poderia resolver a equação de onda para $n = 4$, sabendo a resposta para $n = 5$.

Formulário.

Teorema 4. *Seja $g \in C^2([0,\infty[)$ e $h \in C^1([0,\infty[)$ tais que $g(0) = g''(0) = 0$ e $h(0) = 0$. Logo existe uma única solução $u \in C^2([0,\infty[\times[0,\infty[)$ da equação abaixo:*

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,t) & = & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,t), & (r,t) \in [0,\infty[\times[0,\infty[\\ u(0,t) & = & 0, & t \in [0,\infty[\\ u(r,0) & = & g(r), & r \in [0,\infty[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) & = & h(r), & r \in [0,\infty[\end{array}. \tag{3.1}$$

Essa solução é dada por

$$u(r,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(r+t) + g(r-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} h(y)dy, & r \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(r+t) - g(t-r)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} h(y)dy, & t \geq r \geq 0 \end{cases}.$$