Lista 7. Cadeias de Markov. Introdução. (sexta 06/11/2020)

Exercício 1. Temos duas caixas com $2d$ bolas, sendo d brancas e d pretas. Em cada caixa colocamos ao acaso d bolas. A cada etapa do nosso jogo, retiramos ao acaso uma bola de cada caixa e trocamos elas. Seja X_0 o número inicial de bolas pretas na primeira caixa, X_1 o número de bolas pretas após a primeira jogada, X_n o número de bolas pretas após a n-ésima jogada. Encontre a matriz de transição da Cadeia de Markov X_n.

Solução: Descrevemos conjunto de estados: realmente, se sabemos que k bolas pretas em primeira caixa, então sabemos que $d-k$ bolas brancas nessa caixa, e $d-k$ bolas pretas e k bolas brancas em segunda caixa. Então, o conjunto E de estados é

$$E = \{0, 1, \dots, d\}$$

a matriz de transição é baseada em observação que possíveis incrementos são ± 1, e

$$\begin{aligned}
k \to k, \text{ se } 1 \le k \le d-1, \text{ com } \binom{d}{k}\binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}^2 \text{ possibilidades;}\\
k \to k+1, \text{ se } 1 \le k \le d-1, \text{ com } \binom{d}{d-k}\binom{d}{d-k} = \binom{d}{k}^2 \text{ possibilidades;}\\
k \to k-1, \text{ se } 1 \le k \le d-1, \text{ com } \binom{d}{k}\binom{d}{k} = \binom{d}{k}^2 \text{ possibilidades;}
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
k \to k, \text{ se } 1 \le k \le d-1, &\text{ com probabilidade } 1/3;\\
k \to k+1, \text{ se } 1 \le k \le d-1, &\text{ com probabilidade } 1/3;\\
k \to k-1, \text{ se } 1 \le k \le d-1, &\text{ com probabilidade } 1/3;\\
0 \to 1, &\text{ com probabilidade } 1;\\
d \to d-1, &\text{ com probabilidade } 1.
\end{aligned}$$

□

Exercício 2. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2\}$, vetor de probabilidade inicial igual a $p^{(0)} = (1/4, 1/2, 1/4)$, e matriz de transição a um passo dada por

$$P = \begin{vmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{vmatrix}.$$

1. Calcule $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$.
2. Mostre que $\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = p_{01}p_{11}$.
3. Calcule $p_{01}^{(2)}$.
4. Calcule $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_2 = 1)$.

Solução:

1. Calcule $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1, X_0 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1, X_0 = 0)\\
&= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1, X_0 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0)\\
&= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) = p_{11}p_{01}\mathbb{P}(X_0 = 0)\\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

2. Mostre que $\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = p_{01}p_{11}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \mid X_0 = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)}{\mathbb{P}(X_0 = 0)} \\ &= \frac{p_{11}p_{01}\mathbb{P}(X_0 = 0)}{\mathbb{P}(X_0 = 0)} = p_{11}p_{01}.\end{aligned}$$

3. Calcule $p_{01}^{(2)}$.

$$\begin{aligned}p_{01}^{(2)} &= \sum_{k=0}^{2} p_{0k}p_{k1} = p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} + p_{02}p_{21} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{16}\end{aligned}$$

4. Calcule $\mathbb{P}(X_0 = 0, X_2 = 1)$.

$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 0)p_{01}^{(2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{16} = \frac{7}{64}$$

□

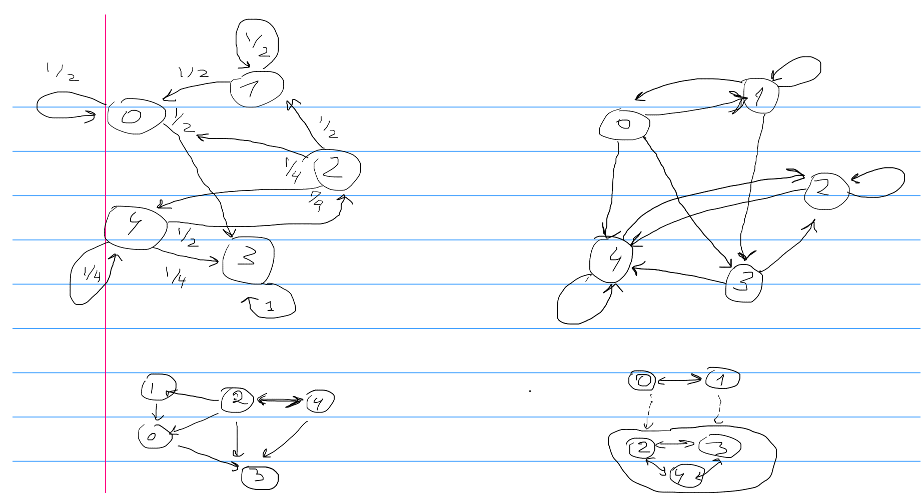
Exercício 3. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P para dois casos:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

1. Determine quais são as classes de comunicação fechada e os estados absorventes para cada um dois casos.
2. Supondo que a distribuição inicial é uniforme entre os estados, achar a probabilidade de que X_2 está em estados 0 ou 1.
3. $\mathbb{P}(X_2 < 2)$. Junto com isso, achar a média $\mathbb{E}(X_2)$.

Solução:

1. Determine quais são as classes de comunicação fechada e os estados absorventes para cada um dois casos.



$\{0\}, \{1\}, \{2,4\}, \{3\}$ $\qquad$ $\{0, 1\}, \{2, 3, 4\}$

2. Supondo que a distribuição inicial é uniforme entre os estados, achar a probabilidade de que X_2 está em estados 0 ou 1.

$$\mathbb{P}(X_2 \in \{0,1\}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=0}^{4}\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) p_{ik} p_{k0} + \sum_{i=0}^{4}\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) p_{ik} p_{k1}$$

1o caso

$$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) P^2 = \left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{vmatrix}^2$$

$$= \left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 3/8 & 1/4 & 1/8 & 3/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 & 5/16 & 3/16 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4},\frac{3}{20},\frac{1}{20},\frac{1}{2},\frac{1}{20}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_2 \in \{0,1\}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

2o caso

$$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) P^2 = \left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}^2$$

$$= \left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right) \begin{vmatrix} 7/36 & 7/36 & 1/9 & 7/36 & 11/36 \\ 7/36 & 11/36 & 0 & 11/36 & 7/36 \\ 0 & 0 & 5/9 & 0 & 4/9 \\ 7/48 & 11/48 & 1/12 & 11/48 & 15/48 \\ 0 & 0 & 4/9 & 0 & 5/9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\left(\frac{77}{144},\frac{105}{144},\frac{43}{36},\frac{105}{144},\frac{261}{144}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_2 \in \{0,1\}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{5}\left(\frac{77}{144} + \frac{105}{144}\right) = \frac{91}{360}$$

□

Exercício 4. Suponha que em uma linha de montagem final para carros haja o seguinte conjunto de regras:

- Dois conversíveis não podem jamais se seguirem na linha, porque o conteúdo de trabalho desequilibraria a linha.
- Uma perua deve ser seguida de um sedan para equilibrar a linha.
- Um sedan tanto pode ser seguido por uma perua como por um conversível, mas não por um sedan.

Somente esses três modelos são fabricados nessa linha. Monte uma matriz de transição possível para essas regras, inserindo as letras $a, b, c, d, \ldots$ etc., para os valores que não são numericamente definidos pelas regras acima.

1. A cadeia é irredutível?
2. Qual é a probabilidade de que após um conversível com um espaço de diferença (separado por outro veículo) o próximo na linha vai ser conversível? Use suas letras para anotação das probabilidades de transição desconhecidas.
3. Se P é uma matriz de transição a um passo, que interpretação você daria ao (ij)-ésimo elemento de P^n, para n grande?

Solução: Seja $E = \{C, S, P\}$ conjunto de estados (C="na linha conversível", S="na linha sedan", P="na linha perua"). As regras sugerem, que

$$p_{CC} = 0,\ p_{PS} = 1,\ p_{SS} = 0$$

então a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & p_{SS} & p_{SP} \\ p_{PC} & p_{PS} & p_{PP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & 0 & p_{SP} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. A cadeia é irredutível?

sim, única classe de comunicação.

2. Qual é a probabilidade de que após um conversível com um espaço de diferença (separado por outro veículo) o próximo na linha vai ser conversível? Use suas letras para anotação das probabilidades de transição desconhecidas.

$$p_{CS}p_{SC} + p_{CP}p_{PC} = p_{CS}p_{SC}$$

3. Se P é uma matriz de transição a um passo, que interpretação você daria ao (ij)-ésimo elemento de P^n, para n grande?

para n qualquer $p_{ij}^{(n)}$ é a probabilidade de que tendo na linha veículo i depois de n carros ter na linha veículo j.
□

Exercício 5. Considere seguinte matriz de transição com estados $E = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja X_n estado de cadeia em instante n. Supondo que cadeia começa de estado 1, achar a probabilidade $\mathbb{P}(X_n = 2)$ para n qualquer, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Solução: Observe que estado 2 é estado absorvente. A probabilidade de que primeira vez atendemos estado 2 em instante n (começando de 1) é

$$\mathbb{P}(X_n = 2, X_i \neq 2, i = 1, \ldots, n \mid X_0 = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

logo, se $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.