Lista 5. Processo de Poisson. Exemplos. (sexta 16/10/2020)

Exercício 1. Seja $N(t)$ um Processo de Poisson com a taxa λ. Seja S_n instante de ocorrência de n-ésimo evento. Achar

1. $\mathbb{E}\big((N(4)-N(2))(N(3)-N(1)\big)$;
2. $\mathbb{E}(N(4)-N(2) \mid N(1)=3)$;
3. $\mathbb{E}(S_k \mid N(t)=k),\ k\geq 2,\ t>0$;
4. $\mathbb{E}(S_1 \mid N(t)=k),\ k\geq 2,\ t>0$.

Solução:

1. $\mathbb{E}\big((N(4)-N(2))(N(3)-N(1))\big)$;

Seja $X=N(2)-N(1)$, $Y=N(3)-N(2)$ e $Z=N(4)-N(3)$.

$$\mathbb{E}\big((N(4)-N(2))(N(3)-N(1))\big)=\mathbb{E}\big((Y+Z)(Y+X)\big)=\mathbb{E}(Y^2)+\mathbb{E}(Y(Z+X))+\mathbb{E}(ZX)$$
$$=\mathbb{V}ar(Y)+(\mathbb{E}(Y))^2+\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z+X)+\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X)=\lambda+\lambda^2+\lambda\cdot 2\lambda+\lambda\cdot\lambda=4\lambda^2+\lambda.$$

2. $\mathbb{E}(N(4)-N(2) \mid N(1)=3)$;

$N(4)-N(2)$ e $N(1)$ são independentes, porque são incrementos independentes, então

$$\mathbb{E}(N(4)-N(2) \mid N(1)=3)=\mathbb{E}(N(4)-N(2))=2\lambda.$$

3. $\mathbb{E}(S_k \mid N(t)=k),\ k\geq 2,\ t>0$;

Sejam $X_i \sim U[0,t]$ e são independentes em conjunto. Temos $S_k=\max(X_1,\dots,X_k)$, e para $s\in[0,t]$ obtemos

$$F_{S_k}(s)=\mathbb{P}(\max(X_1,\dots,X_k)\leq s)=\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X_i\leq s)=\left(\frac{s}{t}\right)^k,$$
$$f_{S_k}(s)=k\left(\frac{s}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t},$$
$$\mathbb{E}(S_k)=\int_0^t sk\left(\frac{s}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t}ds=k\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^k ds=\frac{k}{k+1}t.$$

4. $\mathbb{E}(S_1 \mid N(t)=k),\ k\geq 2,\ t>0$.

Sejam $X_i \sim U[0,t]$ e são independentes em conjunto. Temos $S_1=\min(X_1,\dots,X_k)$, e para $s\in[0,t]$ obtemos

$$F_{S_1}(s)=1-\mathbb{P}(s<\min(X_1,\dots,X_k))=1-\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X_i>s)=1-\left(\frac{t-s}{t}\right)^k,$$
$$f_{S_1}(s)=k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t},$$
$$\mathbb{E}(S_1)=\int_0^t sk\left(1-\frac{s}{t}\right)^{k-1}\frac{1}{t}ds=\frac{1}{k+1}t.$$

□

Exercício 2. Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com taxa λ. Cada evento é registrado com a probabilidade $p(t) = \frac{1}{2}(\sin(t)+1)$. Sejam $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ processos de eventos registrados e não registrados respectivamente.

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(2\pi) < Y(2\pi))$ de que durante o tempo 2π o número de eventos registrados é maior de que não registrados.
2. Achar esperanças $\mathbb{E}(X(\pi))$ e $\mathbb{E}(Y(\pi))$.
3. Achar covariância $Cov(N(\pi), X(\pi))$.

Solução:

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(2\pi) < Y(2\pi))$ de que durante o tempo 2π o número de eventos registrados é maior de que não registrados.

Pelo resultados sobre re-amostragem de processo de Poisson temos,

$$\begin{aligned} X(2\pi) &\sim Poi\left(\lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(sin(t)+1)dt\right) \\ X(2\pi) &\sim Poi\left(\lambda\pi\right) \\ \text{sabemos } N(2\pi) &\sim Poi\left(\lambda 2\pi\right) \\ \text{então } Y(2\pi) = N(2\pi) - X(2\pi) &\sim Poi\left(\lambda\pi\right) \end{aligned}$$

Assim, $X(2\pi), Y(2\pi)$ são independentes e identicamente distribuídas, o que significa que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(2\pi) < Y(2\pi)) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X(2\pi) \neq Y(2\pi)) = \frac{1}{2}\big(1 - \mathbb{P}(X(2\pi) = Y(2\pi))\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\lambda\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\pi)^{2k}}{(k!)^2}\right) \end{aligned}$$

2. Achar esperanças $\mathbb{E}(X(\pi))$ e $\mathbb{E}(Y(\pi))$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} X(\pi) &\sim Poi\left(\lambda \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(sin(t)+1)dt\right) \\ \text{e } \mathbb{E}(X(\pi)) &= \lambda \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(sin(t)+1)dt = \lambda\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \mathbb{E}(Y(\pi)) &= \mathbb{E}(N(\pi)) - \mathbb{E}(X(\pi)) = \lambda\pi - \lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

3. Achar covariância $Cov(N(\pi), X(\pi))$.

$$\begin{aligned} Cov(N(\pi), X(\pi)) &= \mathbb{E}(N(\pi)X(\pi)) - \mathbb{E}(N(\pi))\mathbb{E}(X(\pi)) = \mathbb{E}((Y(\pi)+X(\pi))X(\pi)) - \lambda^2\pi\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \mathbb{E}(Y(\pi))\mathbb{E}(X(\pi)) + \mathbb{E}(X(\pi)^2) - \lambda^2\pi\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \lambda^2\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2 - \lambda^2\pi\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lambda\left(1+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Exercício 3. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ dois processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente. Os eventos (ocorrências) de processo $N_1(t)$ são classificados como eventos do tipo I com a probabilidade $p_1(t) = \min(1, 1/t)$ e tipo II com probabilidade $1 - p_1(t)$, quando eventos de processo $N_2(t)$ são classificados como eventos do tipo I com a probabilidade $p_2(t) = \min(1, 1/t^2)$ e tipo II com probabilidade $1 - p_2(t)$. Sejam $X_I(t)$ e $X_{II}(t)$ são ocorrências de eventos do tipo I e tipo II respectivamente (que vem dos dois processos $N_1(t)$ e $N_2(t)$).

1. Achar a distribuição de $X_I(t)$ e $X_{II}(t)$ para t fixo.
2. Achar covariância $Cov(N_1(t), X_I(t))$.

Solução:

1. Achar a distribuição de $X_I(t)$ e $X_{II}(t)$ para t fixo.

Seja $\xi_{I,1}(t), \xi_{I,2}(t)$ número de eventos do tipo I marcados em processos N_1 e N_2 respectivamente. Pelo theorema

$$\xi_{I,1}(t) \sim Poi\left(\lambda_1 \int_0^t \min(1, 1/s)ds\right), \quad \xi_{I,2}(t) \sim Poi\left(\lambda_2 \int_0^t \min(1, 1/s^2)ds\right).$$

Supondo $t > 1$ obtemos

$$\xi_{I,1}(t) \sim Poi\left(\lambda_1 \left(1 + \ln(t)\right)\right), \quad \xi_{I,2}(t) \sim Poi\left(\lambda_2 \left(2 - \frac{1}{t}\right)\right).$$

Finalmente,

$$X_I(t) = \xi_{I,1}(t) + \xi_{I,2}(t) \sim Poi\left(\lambda_1 \left(1 + \ln(t)\right) + \lambda_2 \left(2 - \frac{1}{t}\right)\right)$$

$$X_{II}(t) = N_1(t) + N_2(t) - X_I(t) \sim Poi\left((\lambda_1 + \lambda_2)t - \lambda_1 \left(1 + \ln(t)\right) - \lambda_2 \left(2 - \frac{1}{t}\right)\right)$$

2. Achar covariância $Cov(N_1(t), X_I(t))$.

Usando anotações do item anterior, adicionando anotações $\xi_{II,1}, \xi_{II,2}$ de forma similar, obtemos

$$\begin{aligned}
Cov\big(N_1(t), X_I(t)\big) &= Cov\big(\xi_{I,1}(t) + \xi_{II,1}(t), \xi_{I,1}(t) + \xi_{I,2}(t)\big) \\
&= Cov\big(\xi_{I,1}(t), \xi_{I,1}(t)\big) + Cov\big(\xi_{I,1}(t), \xi_{I,2}(t)\big) + Cov\big(\xi_{II,1}(t), \xi_{I,1}(t)\big) + Cov\big(\xi_{II,1}(t), \xi_{I,2}(t)\big) \\
&= Cov\big(\xi_{I,1}(t), \xi_{I,1}(t)\big) = \mathbb{V}ar\big(\xi_{I,1}(t)\big) = \lambda_1 \left(1 + \ln(t)\right).
\end{aligned}$$

□

Exercício 4. Consideremos processo de Poisson N_1 e eventos do tipo I e II com a probabilidade $p_1(\cdot)$ e $1-p_1(\cdot)$ respectivamente definidos em item anterior. Consideremos instantes $1 < t_1 < t_2 < t_3 < \infty$.

1. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) \mid N_1(t_2) = 4)$.
2. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)$.
3. $\mathbb{P}(X_{II}(t_1) = a, X_{II}(t_2) = b, X_{II}(t_3) = c)$.

Solução:

1. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) \mid N_1(t_2) = 4)$.

Observe $X_I(t_3) = X_I(t_3) - X_I(t_2) + X_I(t_2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_I(t_3) \mid N_1(t_2) = 4) &= \mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_2) \mid N_1(t_2) = 4) + \mathbb{E}(X_I(t_2) \mid N_1(t_2) = 4)\\ &= \mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_2)) + \mathbb{E}(X_I(t_2) \mid N_1(t_2) = 4)\end{aligned}$$

Observe $X_I(t_2) \mid N_1(t_2) = 4 \sim B(4, p)$, onde

$$p = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} \min(1, 1/s)ds = \frac{1}{t_2}\left(1 + \ln(t_2)\right).$$

Observe

$$X_I(t_3) - X_I(t_2) \sim Poi\left(\lambda_1 \int_{t_2}^{t_3} \frac{ds}{s}\right),$$

logo,

$$\mathbb{E}(X_I(t_3) \mid N_1(t_2) = 4) = \lambda_1 \int_{t_2}^{t_3} \frac{ds}{s} + \frac{4}{t_2}\left(1 + \ln(t_2)\right) = \lambda_1 \ln\left(\frac{t_3}{t_2}\right) + \frac{4}{t_2}\left(1 + \ln(t_2)\right).$$

2. Achar a média $\mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)$.

Aquí incremento $X_I(t_3) - X_I(t_1)$ representamos como soma de dois incrementos $X_I(t_3) - X_I(t_1) = X_I(t_3) \mp X_I(t_2) - X_I(t_1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4) &= \mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_2) \mid N_1(t_2) = 4) + \mathbb{E}(X_I(t_2) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)\\ &= \mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_2)) + \mathbb{E}(X_I(t_2) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)\\ &= \lambda_1 \ln\left(\frac{t_3}{t_2}\right) + \mathbb{E}(X_I(t_2) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4)\end{aligned}$$

Observe $X_I(t_2) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4 \sim B(4, q)$ em que

$$q = \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{s} = \frac{1}{t_2}\ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right).$$

Logo,

$$\mathbb{E}(X_I(t_3) - X_I(t_1) \mid N_1(t_2) = 4) = \lambda_1 \ln\left(\frac{t_3}{t_2}\right) + \frac{4}{t_2}\ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right).$$

3. $\mathbb{P}(X_{II}(t_1) = a, X_{II}(t_2) = b, X_{II}(t_3) = c)$.

$\mathbb{P}(X_{II}(t_1) = a, X_{II}(t_2) = b, X_{II}(t_3) = c) = \mathbb{P}(X_{II}(t_1) = a)\mathbb{P}(X_{II}(t_2) - X_{II}(t_1) = b - a)\mathbb{P}(X_{II}(t_3) - X_{II}(t_2) = c - b)$ observe

$$\begin{aligned}X_{II}(t_1) &\sim Poi\left(\int_0^{t_1} (1 - p_1(s))ds\right),\\ X_{II}(t_2) - X_{II}(t_1) &\sim Poi\left(\int_{t_1}^{t_2} (1 - p_1(s))ds\right),\\ X_{II}(t_3) - X_{II}(t_2) &\sim Poi\left(\int_{t_2}^{t_3} (1 - p_1(s))ds\right)\end{aligned}$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.