# $2^{\underline{a}}$ Prova de Equações Diferenciais e Aplicações

# MAT 130 - 06/11/2020

**Questão 1** $\quad y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Temos uma E.D.O. de segunda ordem não homogênea a coeficientes constantes. Para encontrar sua solução geral, precisamos obter uma solução particular dessa E.D.O. e a solução geral da homogênea associada $y'' + 2y' + 5y = 0$.

A equação característica será, portanto, $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$, que possui as raízes $\alpha_1 = -1 + 2i$ e $\alpha_2 = -1 - 2i$.

Daí, $z_1 = e^{\alpha_1 x} = e^{-x}(\cos 2x + i\sin 2x)$ e $z_2 = e^{\alpha_2 x} = e^{-x}(\cos 2x - i\sin 2x)$ são soluções complexas da E.D.O. homogênea associada. Para encontrar as soluções reais, utilizamos o princípio da superposição:

$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{-x}\cos 2x$

$y_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{-x}\sin 2x$

Daí, a solução geral da homogênea associada será $y_h = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\sin 2x$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais.

Vamos agora encontrar uma solução particular da E.D.O. não homogênea. Para isso, vamos usar o método dos coeficientes da determinar e supor que a solução seja da forma $Axe^{-x}\cos 2x + Bxe^{-x}\sin 2x$.

Substituindo essa expressão como solução da E.D.O., temos:

$-4Ae^{-x}\sin 2x + 4Be^{-x}\cos 2x = 4e^{-x}\cos 2x$

Daí, sabemos que:

$$\begin{cases} 4B = 4 \\ -4A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = 1 \\ A = 0 \end{cases}$$

Portanto, obtemos como solução particular da E.D.O. $y_p = xe^{-x}\sin 2x$. Daí, segue que a solução geral da E.D.O. será $y_g(x) = xe^{-x}\sin 2x + c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\sin 2x$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais.

Sabendo que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, calculamos $c_1$ e $c_2$:

$y(0) = 0 \cdot e^0 \sin 0 + c_1e^0\cos 0 + c_2e^0\sin 0 = c_1 = 1$

$y'(0) = e^0\sin 0 + 0\cdot(-e^0\sin 0 + 2e^0\cos 0) + c_1(-e^0\cos 0 - 2e^0\sin 0) + c_2(-e^0\sin 0 + 2e^0\cos 0) = -c_1 + 2c_2 = -1 + 2c_2 = 0 \implies c_2 = \frac{1}{2}$

Daí, obtemos como solução do P.V.I.:

$y(x) = xe^{-x}\sin 2x + e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$

**Questão 2** $\quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

Temos uma E.D.O. de segunda ordem não homogênea a coeficientes constantes. Para encontrar sua solução geral, precisamos obter uma solução particular dessa E.D.O. e a solução geral da homogênea associada $y'' - 2y' + y = 0$.

A equação característica será, portanto, $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$, que possui as raízes $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Daí, $y_1 = e^x$ e $y_2 = xe^x$ são duas soluções L.I. da homogênea associada e a solução geral da homogênea será $y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$, onde $c_1$ e $c_2$ são constantes reais.

Vamos agora encontrar uma solução particular da E.D.O. não homogênea. Para isso, vamos usar o método da variação dos parâmetros para encontrar solução particular da forma $y_p = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$.

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{1+x^2} & (xe^x)' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ (e^x)' & (xe^x)' \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{e^x}{1+x^2} xe^x}{e^{2x}} = -\frac{x}{x^2+1} \implies$$

$$\implies v_1 = \int -\frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln{(x^2+1)}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ (e^x)' & \frac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ (e^x)' & (xe^x)' \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^x}{1+x^2} e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2+1} \implies$$

$$\implies v_2 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

Daí, temos como solução particular $y_p = -\frac{1}{2} \ln{(x^2+1)} e^x + xe^x \arctan x$

Nossa solução geral será:

$y(x) = -\frac{1}{2} \ln{(x^2+1)} e^x + xe^x \arctan x + c_1 e^x + c_2 x e^x$

**Questão 3**

**(1)** $t^2 (t^r)'' + \alpha t (t^r)' + \beta t^r = 0 \Leftrightarrow t^2 r(r-1) t^{r-2} + \alpha t r t^{r-1} + \beta t^r = 0 \Leftrightarrow r(r-1)t^r + \alpha r t^r + \beta t^r = 0 \Leftrightarrow t^r (r(r-1) + \alpha r + \beta) = 0 \Leftrightarrow t^r (r^2 + (\alpha - 1) r + \beta) = 0$

Como $t > 0$, então $t^r > 0$, de onde segue que $t^r (r^2 + (\alpha-1)r + \beta) = 0 \Leftrightarrow r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0$

**(2)** Como $(\alpha - 1)^2 = 4\beta$, obtemos que $\beta = \frac{(\alpha-1)^2}{4}$.

Daí, temos $r^2 + (\alpha-1)r + \frac{(\alpha-1)^2}{4} = 0$, de onde obtemos $r = -\frac{(\alpha-1)}{2}$ como raiz, o que significa que $y_1 = t^{-\frac{(\alpha-1)}{2}}$ é solução da E.D.O.

Vamos agora utilizar o método da redução de ordem para achar uma segunda solução da

Equação de Euler. Para isso, precisamos deixar a E.D.O. na forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, de forma que fazemos $y'' + \frac{(\alpha-1)}{t}y' + \frac{(\alpha-1)^2}{4t^2}y = 0$

$y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{e^{-P(s)}}{y_1(s)^2}ds = t^{-\frac{(\alpha-1)}{2}}\int^t \frac{e^{-\alpha ln|s|}}{(s^{-\frac{(\alpha-1)}{2}})^2}ds = t^{-\frac{(\alpha-1)}{2}}\int^t \frac{s^{-\alpha}}{s^{-(\alpha-1)}}ds = t^{-\frac{(\alpha-1)}{2}}\int^t \frac{1}{s}ds = t^{-\frac{(\alpha-1)}{2}}lnt$

**Questão 4**

Observe que, para $0 \leq t < 1$, temos $f(t) = c_1 g(t)$ onde $c_1 = 1$, portanto f e g são L.D. para $t \geq 0$.

Além disso, para $-1 < t < 0$, temos $f(t) = c_2 g(t)$ onde $c_2 = -1$, portanto f e g são L.D. para $t < 0$.

Entretanto, para $-1 < t < 1$, f e g são L.I., pois $\nexists c_3$ tal que $f(t) = c_3 g(t)$ (precisaríamos de $c_3 = c_1$ em $0 \leq t < 1$ e de $c_3 = c_2$ em $-1 < t < 0$ e, como $c_1 \neq c_2$, isso não é possível).

Vamos agora calcular o Wronskiano $W[f,g]$.

Para $0 < t < 1$, temos:

$W[f,g] = \begin{vmatrix} t^3 & t^3 \\ 3t^2 & 3t^2 \end{vmatrix} = 3t^5 - 3t^5 = 0$

Para $-1 < t < 0$, temos:

$W[f,g] = \begin{vmatrix} t^3 & -t^3 \\ 3t^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = -3t^5 + 3t^5 = 0$

Para $t = 0$, temos:

$W[f,g] = \begin{vmatrix} f(0) & g(0) \\ f'(0) & g'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^3 & 0^2|0| \\ 3 \cdot 0^2 & g'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g'(0) \end{vmatrix}$

Observamos que:

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h^3-0}{h} = \lim_{h \to 0+} h^2 = 0$

$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h^3-0}{h} = \lim_{h \to 0-} -h^2 = 0$

Logo, temos que:

$W[f,g] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ para $t = 0$.

Portanto, $W[f,g]$ é nulo para $0 < t < 1$, $-1 < t < 0$ e $t = 0$, obtemos que $W[f,g]$ é nulo em $-1 < t < 1$.

Sabemos que duas soluções L.I. de uma E.D.O. linear, de segunda ordem, a coeficientes contínuos e homogênea necessariamente têm o Wronskiano diferente de 0 em todos os pontos do intervalo considerado.

Como f e g são L.I. e o Wronskiano é igual a 0 para todo t em $-1 < t < 1$, obtemos que f e g não podem ser soluções L.I. de uma E.D.O. linear, de segunda ordem, a coeficientes contínuos e homogênea.