Campos conservativos

Definição

Um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é conservativo se existir* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla \varphi(x, y) = \vec{F}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

A função φ *é chamada de função potencial de* $\vec{F}$*.*

Exemplo

O campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ *é conservativo, pois, tomando* $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ *teremos,*

$$\nabla\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Exemplo

O campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ *é conservativo, pois, tomando* $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ *teremos,*

$$\nabla\varphi(x,y) = \vec{F}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Observação:
Notemos que se $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ é conservativo, existirá uma função $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Deste modo, como consequência do teorema de Schawarz temos:

Teorema

Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *um campo vetorial de classe* C^1. *Se* $\vec{F}$ *é conservativo então*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Exemplo

O campo $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *não é conservativo, pois* $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Teorema

Seja $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial contínuo e conservativo e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função potencial de* $\vec{F}$. *Suponha que* $\gamma : [a, b] \to \Omega$ *uma curva de classe* C^1, *com* $\gamma(a) = A$ *e* $\gamma(b) = B$. *Então*

$$\int_\gamma \vec{F} d\gamma = \int_\gamma \nabla\varphi d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Observação:

1) Se $\vec{F}$ é campo conservativo e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ uma curva de classe C^1 tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ (curva fechada) vem do teorema anterior que

$$\int_\gamma \vec{F} d\gamma = 0$$

2) Se $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$, e $\gamma_2 : [a, b] \to \Omega$ são curvas de classe C^1 tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ vem do teorema anterior que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2$$

Exemplo

Calcule $\displaystyle\int_\gamma xdx + ydy$ *onde* $\gamma(t) = (t^3 + t, \ln(t+1))$, $0 \leq t \leq 1$.

solução: Temos que $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$ é uma função potencial do campo $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Daí do teorema anterior temos

$$\int_\gamma xdx + ydy = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0))$$

$$= \varphi(2, \ln 2) - \varphi(0, 0) = 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Exemplo

Mostre que o campo

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

não é conservativo.

solução: Considere a curva fechada $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Temos que

$$\int_\gamma \vec{F} d\gamma = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} x'(t)dt + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} y'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Portanto $\vec{F}$ não é conservativo pois a integral de linha de $\vec{F}$ sobre o caminho fechado γ é diferente de zero.