MAT0311 – Cálculo V
MAP0217 – Cálculo diferencial

Dicas e sugestões para os Problemas 1

Exercício 1.

Sugestões.

a) Verifique que, para cada $v \neq 0$ perpendicular a $y - x \neq 0$,

$$z = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{4r^2 - d^2}}{2} v$$

satisfaz às condições pedidas, e argumente que existem infinitos tais v em $\mathbb{R}^n$ quando $n \geq 3$.

b) Se z satisfaz às condições pedidas, $\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$. Verifique que isto implica $z - y = \lambda(x - z), \lambda \geq 0$. Mas então, $\lambda = 1$ e, portanto, $z = (x+y)/2$ é o único tal ponto.

c) Se existisse tal z a desigualdade triangular seria violada. □

Exercício 2.

Dica. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \dfrac{e_1 + ke_2}{\|e_1 + ke_2\|} \in S$ e os x_k são todos distintos. [1] □

Exercício 3.

Dicas.

a) Se $x = (1/2, 0)$ e $y = (0, 1/2)$, $\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p = 1$.

b) Verifique que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_p$$

e use o teorema do confronto.

□

Exercício 4.

Sugestões.

a) É suficiente verificar que

$$\operatorname{dist}(p, X) \leq \operatorname{dist}(q, X) + d(p,q) \quad \text{e} \quad \operatorname{dist}(q, X) \leq \operatorname{dist}(p, X) + d(p,q) \ .$$

b) Observe que $p \in X \Rightarrow \operatorname{dist}(p, X) = 0$. Por outro lado, $p \in X'$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x = x(\varepsilon) \in X$ tal que $0 < d(p, x) < \varepsilon$.

[1] Em $\mathbb{R}$ é possível mostrar (exercício) que toda norma é da forma $\|\cdot\| = \alpha \|\cdot\|_2$, $\alpha > 0$. Logo, S tem sempre dois pontos.

c) Primeiramente, mostre que, para qualquer conjunto X, $\overline{X}$ é fechado. Para a conclusão, seja F o menor conjunto fechado contendo X. Como $\overline{X}$ é fechado e contém X, $F \subset \overline{X}$. Reciprocamente, $X \subset F \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{F} = F$.

d) Para o primeiro exemplo, escolha $\mathbb{Q} = \{q_i \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos racionais e tome $A_i = \overline{A_i} = \{q_i\}$. Para o segundo, tome $A_1 = \mathbb{Q}$ e $A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para ver que $\overline{A_1 \cap A_2} = \emptyset \neq \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \mathbb{R}$.

□

Exercício 5.

Solução. Vamos começar mostrando que $S_r\,[p] \subseteq \operatorname{Fr} B_r\,(p)$. Para isso, precisamos mostrar que, dado $x \in S_r\,[p]$, para todo $\varepsilon > 0$, existem $y \in B_\varepsilon\,(x) \cap B_r\,(p)$ e $z \in B_\varepsilon\,(x) \cap (V \setminus B_r\,(p))$. Supomos, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 2r$. De fato, se encontrarmos y, z nessas condições, encontramos também para qualquer $\varepsilon' \geq 2r$, já que, neste caso, $B_{\varepsilon'}\,(x) \supset B_\varepsilon\,(x)$.

Sejam, então,

$$y = x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-p)}{r} \qquad \text{e} \qquad z = x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-p)}{r} \ . \tag{1}$$

Temos:

$$\begin{aligned} d(y,p) &= \left\| x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-p)}{r} - p \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right)(x-p) \right\| \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2r}\right)\|x-p\| \\ &= r - \frac{\varepsilon}{2} < r \ , \end{aligned}$$

e:

$$d(y,x) = \left\| x - \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-p)}{r} - x \right\| = \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{\|x-p\|}{r}}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ .$$

Portanto, de fato $y \in B_\varepsilon\,(x) \cap B_r\,(p)$. Analogamente, vemos que:

$$d(z,p) = r + \frac{\varepsilon}{2} > r \qquad \text{e} \qquad d(z,x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ ,$$

de onde concluímos que $z \in B_\varepsilon\,(x) \cap (V \setminus B_r\,(p))$, uma vez que

$$V \setminus B_r\,(p) = \{q \in V \,:\, d(q,p) \geq r\} \ .$$

Isso mostra que $S_r\,[p] \subset \operatorname{Fr} B_r\,(p)$.

Reciprocamente, seja $x \in \operatorname{Fr} B_r\,(p)$. Se $d(x,p) < r$, então, por definição, $x \in B_r\,(p)$, que é um conjunto aberto. Portanto, existe uma bola centrada em x e inteiramente contida em $B_r\,(p)$. Em outras palavras, x não pode ser ponto de fronteira. Por outro lado, se $d(x,p) > r$, então $x \in V \setminus B_r\,[p]$, que também é um conjunto aberto (pois sabemos que bolas fechadas são conjuntos fechados). Portanto, existe uma bola centrada em x e inteiramente contida nesse conjunto. Esta bola, por sua vez, não pode interceptar $B_r\,(p) \subset B_r\,[p]$. Assim, x também não pode ser ponto de fronteira neste caso. Resta apenas a alternativa $d(x,p) = r$. Portanto, $\operatorname{Fr} B_r\,(p) \subset S_r\,[p]$. Concluímos assim que

$$\boxed{\operatorname{Fr} B_r\,(p) = S_r\,[p]}$$

Agora, observe que:

- Os pontos y, z construídos em (1) também pertencem a $B_\varepsilon\,(x) \cap B_r\,[p]$ e $B_\varepsilon\,(x) \cap (V \setminus B_r\,[p])$, respectivamente, d'onde $S_r\,[p] \subset \operatorname{Fr} B_r\,[p]$;
- O raciocínio desenvolvido no parágrafo anterior também mostra automaticamente que $\operatorname{Fr} B_r\,[p] \subset S_r\,[p]$.

Concluímos dos dois itens acima, portanto, que:

$$\boxed{\operatorname{Fr} B_r\,[p] = S_r\,[p]}$$

Por fim, temos:

$$\overline{B_r\,(p)} = B_r\,(p) \cup (B_r\,(p))' \ .$$

Mas, considerando o ponto y em (1), vemos que $S_r\,[p] \subset (B_r\,(p))'$. Assim,

$$B_r\,(p) \cup (B_r\,(p))' \subset B_r\,(p) \cup S_r\,[p] = B_r\,[p] \ .$$

Por outro lado, se $d(x,p) > r$, x não pode ser ponto de acumulação de $B_r\,(p)$, como discutido antes. Assim, $(B_r\,(p))' \subset B_r\,[p]$. Juntando os dois resultados, obtemos:

$$\boxed{\overline{B_r\,(p)} = B_r\,[p]}$$ □

Exercício 6.

Dica. Verifique que, para cada $x \in X$,

$$\delta_x = \inf_{x' \in X} d(x, x') > 0$$

e tome $B_x = B_{\delta_x}\,(x)$. Em $\mathbb{R}^n$, argumente que cada uma dessas bolas precisa conter um ponto de coordenadas racionais. □

Exercício 7.

Dica. Observe que todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se escreve como $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \cap B_n\,[0]$, de maneira que, se X for não- enumerável, algum desses conjuntos precisa ser infinito. O resultado segue então do Teorema de Bolzano-Weierstrass. □

Exercício 8.

Solução. Como $K \subset U$ e U é aberto, para cada $x \in K$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$. Consideramos a seguinte cobertura aberta de K:

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon_x/2}(x) \ .$$

Como K é compacto, existem $x_1, \ldots, x_m \in K$ tais que $K \subset B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_m/2}(x_m)$, onde $\varepsilon_j = \varepsilon_{x_j}$. Definimos

$$L = B_{\varepsilon_1/2}[x_1] \cup \ldots \cup B_{\varepsilon_m/2}[x_m] \ .$$

Então, temos:

1. L é fechado, pois é união finita de fechados, e limitado, pois é união finita de conjuntos limitados (exercício 3 da lista 2). Portanto, como é subconjunto de $\mathbb{R}^n$, é compacto, pelo teorema de Heine-Borel;

2. $K \subset L^\circ$, pois:

$$L^\circ = \left[\bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon_j/2}[x_j]\right]^\circ \supset \bigcup_{j=1}^{m} \left[B_{\varepsilon_j/2}[x_j]\right]^\circ = \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon_j/2}(x_j) \supset K \ .$$

3. $L \subset U$ pois, por escolha dos ε_x:

$$L = \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon_j/2}[x_j] \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon_j}(x_j) \subset U \ .$$

Assim, L é o conjunto buscado. □

Exercício 9.

Solução. Podemos escrever E como $E = E_1 \cup E_2$, onde E_1 é o segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ e $E_2 = G(f)$. Vamos mostrar que, se $\gamma : [0, 1] \to E$ é um caminho contínuo tal que $\gamma(0) = (0, 0) \in E_1$, então $\gamma(t) \in E_1 \, \forall t$. Assim, não pode existir caminho em E ligando $(0, 0)$ a pontos de E_2 e, portanto, E não pode ser conexo por caminhos.

Seja

$$A = \gamma^{-1}(E_1) = \{t \in [0, 1] \, : \, \gamma(t) \in E_1\} \ .$$

Como E_1 é fechado em E (pois é fechado em $\mathbb{R}^2$) e γ é contínua, A é fechado em $[0, 1]$. Além disso, $0 \in A \neq \varnothing$.

Vamos ver agora que A é aberto em $[0, 1]$: tome $t_0 \in A$. Então, $\gamma(t_0) = (0, h)$, para algum $-1 \leq h \leq 1$. Agora, pela continuidade de γ, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$t \in [0, 1] \text{ e } |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\gamma(t) - (0, h)\|_\infty < 1 \ , \tag{2}$$

onde adotamos em $\mathbb{R}^2$ a métrica do máximo.

Escrevemos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, onde as funções coordenadas $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ são contínuas. Se $D = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, D é conexo, pois é a intersecção de dois intervalos com o ponto t_0 em comum. Logo, pelo TVI, $\gamma_1(D) \subset [0, +\infty)$ é um intervalo contendo 0.

Suponha que $\gamma_1(D)$ contém algum ponto $x > 0$. Então, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existem pontos

$$x_1 = \frac{2}{(1+4n)\pi} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{(3+4n)\pi}$$

tais que $0 < x_2 < x_1 < x$ e, portanto, $x_1, x_2 \in \gamma_1(D)$. Logo, existem $t_1, t_2 \in D$ tais que $\gamma(t_i) = x_i$. Agora, note que:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \ , \\
\sin\left(\frac{1}{x_2}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \ .
\end{aligned}$$

Mas, como $\gamma_1(t_1) = x_1 > 0$, temos que $\gamma(t_1) \in E_2 = G(f)$ e, portanto, $\gamma(t_1) = (x_1, \sin(1/x_1)) = (x_1, 1)$. Analogamente, $\gamma(t_2) = (x_2, -1)$. Porém, neste caso, temos:

- se $0 < h \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t_2) - (0,h)\|_\infty &= \|(x_1,-1) - (0,h)\|_\infty \\
&= \max\{|x_1|, |-1-h|\} \\
&\geq |-1-h| \\
&= 1 + h > 1 \ ,
\end{aligned}$$

- se $-1 \leq h \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t_1) - (0,h)\|_\infty &= \|(x_1,1) - (0,h)\|_\infty \\
&= \max\{|x_1|, |1-h|\} \\
&\geq |1-h| \\
&= 1 - h \geq 1 \ ,
\end{aligned}$$

contradizendo (2). Logo, $\gamma_1(D)$ não pode conter nenhum ponto $x > 0$, sendo assim o intervalo degenerado $\gamma_1(D) = \{0\}$. Segue que:

$$t \in D = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1] \ \Rightarrow \ \gamma(t) = (0, \gamma_2(t)) \in E_1 \ .$$

Ou seja, $D \subset \gamma^{-1}(E_1) = A$ é uma vizinhança de t_0 inteiramente contida em A. Assim, t_0 é ponto interior de A. Como t_0 era qualquer, A é de fato aberto em $[0,1]$.

Mas então obtivemos $A \subset [0,1]$ não-vazio que é aberto e fechado em $[0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo, isso implica que $A = [0,1]$. Segue que $\forall\, t \in [0,1]$, como $t \in A$, temos $\gamma(t) \in E_1$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exercício 10.

Sugestão de leitura. Cf. *Espaços métricos* (E. L. Lima), capítulo 7, §7. $\square$