MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

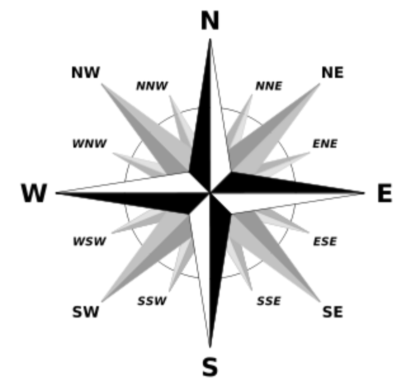
Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Problema de Dirichlet para a Eq. de Poisson

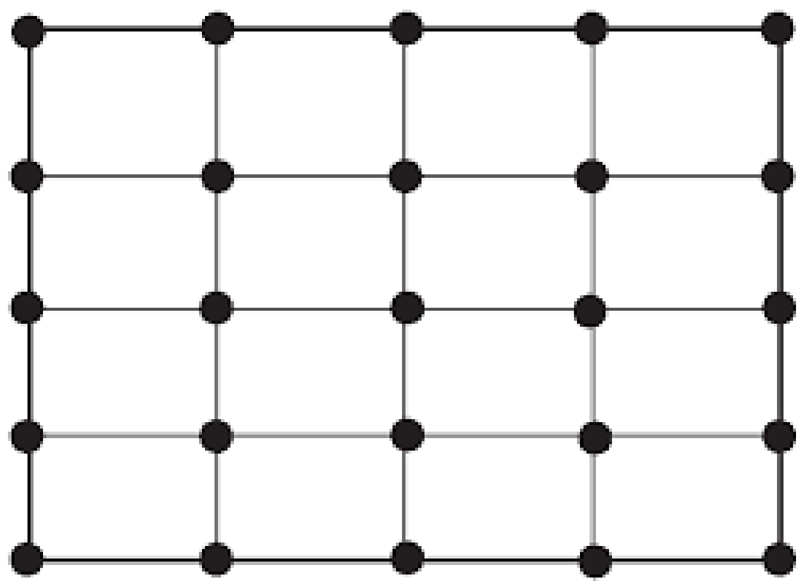
$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

$$a \le x \le b$$
$$c \le y \le d$$



$$u(x, d) = g_N(x)$$

$$u(a, y) = g_W(y)$$



$$u(b, y) = g_E(y)$$

$$u(x, c) = g_S(x)$$

Definindo os respectivos espaçamentos:

$h = \dfrac{b-a}{m}$, $\quad k = \dfrac{d-c}{n}$,onde *m* e *n* são os respectivos nos. de intervalos

Aproximando $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ por diferenças finitas de 2ª ordem:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = f_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

$$-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)u_{i,j} + \left(\frac{1}{h^2}\right)\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + \left(\frac{1}{k^2}\right)\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = f_{i,j}$$

Multiplicando por h^2 e definindo $\lambda = \dfrac{h^2}{k^2}$ e :

$$-2(1+\lambda)u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \lambda\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = h^2 f_{i,j}$$

Definindo $\mu = 2(1+\lambda)$ e isolando $u_{i,j}$ temos:

$$u_{i,j} = \frac{1}{\mu}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - h^2 f_{i,j}\}$$

Para o caso particular de domínios quadrados temos: $h = k, \lambda = 1, \mu = 4$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\}$$

E no caso ainda mais particular para a eq. de Laplace:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\}$$

Aplicando uma varredura indicial dos menores valores de i e j para os maiores pode-se implementar o método iterativo de Gauss-Seidel para o problema de Dirichlet da equação de Poisson usando o algoritmo a seguir (não é o melhor pseudo-código do mundo, mas é um começo).

```
INPUT a,b,c,d -> extremos do domínio
      m,n     -> no. de intervalos nas direções x e y respectivamente
      tol     -> tolerância do critério de parada do método iterativo
      itmax   -> no. máximo de iterações (para evitar loop infinito)

h=(b-a)/m, k=(d-c)/n, lambda = (h*h)/(k*k), mu =2*(1+lambda)


for i = 0,m          -> definição as coordenadas da malha
 x(i) = a + i*h
endfor

for j = 0,n
 y(j) = c + j*k
endfor

for i = 0,m
for j = 0,n
 u(i,j) = 0.                  -> inicialização da solução
 f(i,j) = f(x(i),y(j))        -> definição do termo forçante
endfor
endfor


for i = 0,m          -> aplicação das condições de contorno de Dirichlet
 u(i,0) = gs(x(i))
 u(i,n) = gn(x(i))
endfor

for j = 1,n-1
 u(0,j) = gw(y(j))
 u(m,j) = ge(y(j))
endfor
```

```
norm = 1e+02          -> valor inicial arbitrário da norma
l = 1                 -> início do loop do método de Gauss-Seidel

"TAG"

for i = 1,m-1                    -> laço para os pontos interiores
for j = 1,n-1
 u(i,j) = (u(i+1,j)+u(i-1,j)+lambda*(u(i,j+1)+u(i,j-1))-h*h*f(i,j))/(mu)
endfor
endfor

z = max(u)             -> norma do máximo da linguagem escolhida

if (abs(z-norm).le. tol) then
 write(u)              -> comando de impressão/plotagem/saída da linguagem escolhida
 write("erro=", abs(z-norm))
 STOP
else
 norm = z
endif

if (l.ge.itmax) then
 write(u)              -> comando de impressão/plotagem/saída da linguagem escolhida
 write("erro=", abs(z-norm))
 write ("WARNING - no. max. Iterações atingido")
 STOP
endif

l = l + 1

Goto "TAG"
```

3. Approximate the solutions to the following elliptic partial differential equations, using Algorithm 12.1:

a. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Use $h = k = 0.2$, and compare the results to the actual solution $u(x, y) = xy$.

Solução num quadrado unitário com h = k = 1/3

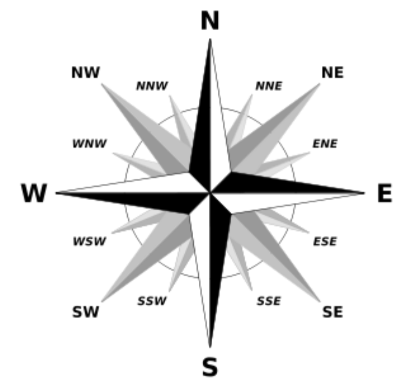
	iterações									
n	0	1	2	3	4	5			sol	erro_2
u_1_1	0	0	0,041667	0,09375	0,106771	0,110026			0,111111	1,17738E-06
u_2_1	0	0,083333	0,1875	0,213542	0,220052	0,22168			0,222222	2,94344E-07
u_1_2	0	0,083333	0,1875	0,213542	0,220052	0,22168			0,222222	2,94344E-07
u_2_2	0	0,375	0,427083	0,440104	0,443359	0,444173			0,444444	7,3586E-08
									norma_2	1,83965E-06

Problema de Poisson com condições mistas

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

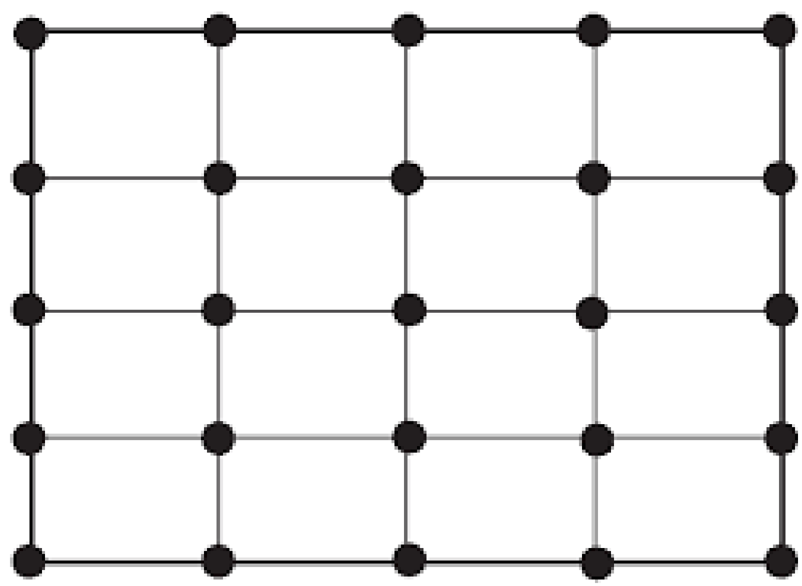
$$a \le x \le b$$

$$c \le y \le d$$



$$u(x,d) = g_N(x)$$

$$u(a,y) = g_W(y)$$



$$\frac{\partial u}{\partial x}(b,y) = g_E(x)$$

$$u(x,c) = g_S(x)$$

A discretização da equação resulta na mesma expressão para os pontos internos:

$$u_{i,j} = \frac{1}{\mu}\{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \lambda(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - h^2 f_{i,j}\}$$

A alteração ocorre na necessidade de aproximar a derivada no contorno por uma expressão algébrica.

A fórmula de diferenças finitas regressiva de 2ª ordem pode ser utilizada.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2h} = g_E(y_j)$$

Logo

$$u_{i,j} = \frac{1}{3}\left(2h g_E(y_j) + 4u_{i-1,j} - u_{i-2,j}\right)$$

No problema exemplo essa expressão deve ser aplicada para o contorno i=m

```
INPUT a,b,c,d -> extremos do domínio
      m,n     -> no. de intervalos nas direções x e y respectivamente
      tol     -> tolerância do critério de parada do método iterativo
      itmax   -> no. máximo de iterações (para evitar loop infinito)

h=(b-a)/m, k=(d-c)/n, lambda = (h*h)/(k*k), mu =2*(1+lambda)


for i = 0,m          -> definição as coordenadas da malha
 x(i) = a + i*h
endfor

for j = 0,n
 y(j) = c + j*k
endfor

for i = 0,m
for j = 0,n
 u(i,j) = 0.                  -> inicialização da solução
 f(i,j) = f(x(i),y(j))        -> definição do termo forçante
endfor
endfor

for i = 0,m          -> aplicação das condições de contorno de Dirichlet
 u(i,0) = gs(x(i))
 u(i,n) = gn(x(i))
endfor

for j = 1,n-1
 u(0,j) = gw(y(j))
Endfor

for j = 1,n-1-> aplicação da condições de contorno de Neumann para a condição inicial
 u(m,j) = (2*h*ge(y(j))+4*u(m-1,j)-u(m-2,j))/3
endfor
```

```
norm = 1e+02         -> valor inicial arbitrário da norma
l = 1                -> início do loop do método de Gauss-Seidel

"TAG"

for i = 1,m-1                   -> laço para os pontos interiores
for j = 1,n-1
 u(i,j) = (u(i+1,j)+u(i-1,j)+lambda*(u(i,j+1)+u(i,j-1))-h*h*f(i,j))/(mu)
endfor
Endfor

for j = 1,n-1                  -> aplicação da condições de contorno de Neumann
 u(m,j) = (2*h*ge(y(j))+4*u(m-1,j)-u(m-2,j))/3
endfor

z = max(u)            -> norma do máximo da linguagem escolhida

if (abs(z-norm).le. tol) then
 write(u)             -> comando de impressão/plotagem/saída da linguagem escolhida
 write("erro=", abs(z-norm))
 STOP
else
 norm = z
endif

if (l.ge.itmax) then
 write(u)             -> comando de impressão/plotagem/saída da linguagem escolhida
 write("erro=", abs(z-norm))
 write ("WARNING - no. max. Iterações atingido")
 STOP
endif

l = l + 1

Goto "TAG"
```

3. Approximate the solutions to the following elliptic partial differential equations, using Algorithm 12.1:

a. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = x, \qquad 0 \le x \le 1;$$
$$\boxed{u_x(0,y) = y} \quad u(1,y) = y, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Use $h = k = 0.2$, and compare the results to the actual solution $u(x,y) = xy$.

Vamos mudar uma condição de contorno para du/dx=y em x=0

O que deve acontecer ?

Solução num quadrado unitário com h = k = 1/3

			iterações									
n	0	1	2	3	4	8	9	10			sol	erro_2
u_1_1	0	-0,01852	-0,00116	0,040196	0,068479	0,105983	0,108101611	0,109345			0,111111	3,11799E-06
u_2_1	0	0,078704	0,1739	0,195114	0,206251	0,220318	0,22110518	0,221567			0,222222	4,29513E-07
u_1_2	0	0,041667	0,120467	0,164322	0,188722	0,218291	0,219916447	0,22087			0,222222	1,82968E-06
u_2_2	0	0,363426	0,406925	0,423192	0,432077	0,442986	0,44358874	0,443942			0,444444	2,52011E-07
											norma_2	2,37E-03

A aproximação da derivada da condição de contorno contribui para o aumento do erro

Example 2

Use the Poisson finite-difference method with $n = 6$, $m = 5$, and a tolerance of 10^{-10} to approximate the solution to

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

with the boundary conditions

$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 2e^y, \quad 0 \le y \le 1,$$
$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = ex, \quad 0 \le x \le 2,$$

and compare the results with the exact solution $u(x, y) = xe^y$.

Vamos realizar o problema com n = 3, m = 3

…

		iterações									
n	0	1	2	3	8	9	10			sol	erro_2
u_1_1	0	0,25633	0,663263	0,909938	1,01117	1,011250145	1,01127			0,930408	0,006538645
u_2_1	0	0,817403	1,74558	1,934142	1,991208	1,991248256	1,991258			1,860817	0,017015039
u_1_2	0	0,812982	1,197626	1,33727	1,389498	1,389538368	1,389548			1,298489	0,008291746
u_2_2	0	2,218709	2,628445	2,717834	2,745883	2,745903139	2,745908			2,596979	0,022179974
	norma		1,159	0,352	0,0004	0,0001	2,5E-05			norma_2	0,232433654

Norma_2 iterações sucessivas

Norma_2 erro sol. exata

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- **Método de Diferenças Finitas**
- Equação do calor transiente (parabólica)
- **Equação de Poisson (elíptica)**
- Equação da onda (hiperbólica)