Domínio de Atração

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Novembro de 2020

Domínio de Atração

Na aula anterior aprendemos resultados assintóticos de sequências de mínimos e máximos padronizados para sequências de variáveis aleatórias independentes e identicamenete distribuídas. As distribuições limites eram de três tipo, tanto para a sequência de mínimos, quanto para a de máximos. Nesta aula aprenderemos sobre domínio de atração.

Domínio de Atração

Definição 1 Uma distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de uma distribuição G se existem constantes a_n e b_n, tais que $\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x)$.

Semelhantemente, F pertence ao domínio de atração maximal de G se existem constantes a_n e b_n, tais que $F^n(a_n x + b_n) \to^D G(x)$.

O nosso objetivo é determinar os domínios de atrações minimais para W_1, W_2 e Λ, e os domínios de atrações maximais para W_1^*, W_2^* e Λ^*. Necessitaremos do seguinte Lema:

Lema 1

$$\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x) \Leftrightarrow nF(a_n x + b_n) \to^D -\ln \overline{G}(x).$$

para todo ponto de continuidade de $G(x)$, com $\overline{G}(x_0) \neq 0$,

Domínio de Atração

Prova Sob quaisquer das condições

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}((a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} (\overline{F}^n((a_n x + b_n))^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{G}(x))^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Note também que $1 - y \leq \int_y^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{y}(1-y)$.

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} n.F(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{nF(a_n x + n_n)}{\overline{F}(a_n x + b_n)},$$

e segue que

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}^n(a_n x + b_n).$$

Domínio de Atração

O teorema 1 dá condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração minimal da distribuição de Weibull. O Corolário 4 trata de condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração maximal de W_1^*.

Teorema 1 Domínio de atração minimal de $W_1(x)$
A distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, x \geq 0, (\alpha > 0)$ se, e somente se,

A) Existe x_0 tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0 + \varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$;
B) $\lim_{t \downarrow 0}[\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = x^{\alpha}$, para $x > 0, (\alpha > 0)$.

Prova

A condição é suficiente. Considere $x_0 = 0$ e $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$ de maneira que $\lim_{n\to\infty} nF(a_n) = 1$.

Por hipótese $\lim_{t\downarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = x^{\alpha}, x > 0$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(a_n x)}{F(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nF(a_n x)}{nF(a_n)} = \lim_{n\to\infty} nF(a_n x),$$

e pelo Lema 1, $-\ln \overline{W_1}(x) = x^{\alpha}$ e $\overline{W_1}(x) = e^{-x^{\alpha}}$.

A condição necessária pode ser encontrada em Gnedenko (1943).

Corolário 1 Domínio de atração maximal de $W_1^*(x)$ A distribuição F pertence ao domínio de atração maximal de $W_1^*(x) = e^{-(-x)^\alpha}, x \leq 0(\alpha > 0)$ se, e somente se,

A) Existe x_1 tal que $F(x_1) = 1$ e $F(x_1 - \varepsilon) < 1$, $\forall \varepsilon > 0$;

B)) $\lim_{t\uparrow 0}[\frac{\overline{F}(xt+x_1)}{\overline{F}(t+x_1)}] = x^\alpha$, para $x > 0, (\alpha > 0)$.

Obeservação 1

Observe que $\max\{X_1, ..., X_n\} = -\min\{-X_1, ..., -X_n\}$ e
$F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x)$.
Portanto, utilizando a parte A) do teorema anterior,
$F_{-X}(x_0) = 0 \to 1 - F_X(-x_0) = 0 \to F_X(-x_0) = 1$ é suficiente considerar $x_1 = -x_0$ de maneira que

$$F_{-X}(x_0 + \varepsilon) > 0 \to 1 - F_X(-x_0 - \varepsilon) > 0 \to F(x_1 - \varepsilon) < 1,$$

e

$$x^{\alpha} = \lim_{t \downarrow 0}[\frac{F_{-X}(xt + x_0)}{F_{-X}(t + x_0)}] = \lim_{-t \uparrow 0}[\frac{1 - F_X(-xt - x_0)}{1 - F_X(-t - x_0)}] = \lim_{t \uparrow 0}[\frac{\overline{F}(xt + x_1)}{\overline{F}(t + x_1)}].$$

Domínio de Atração

Exemplo A função de distribuição

$$F(x) = 1 - k(a-x)^{\alpha}, \quad a - k^{\frac{-1}{\alpha}} \leq x \leq a, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração maxima de $W_1^*(x)$. Considere $x_1 = a$. Portanto

$$\lim_{t \downarrow 0} [\frac{\overline{F}(xt - x_1)}{\overline{F}(t - x_1)}] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{k[a - xt - a]^{\alpha}}{1 - k[a - t - a+]^{\alpha}} =$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{[-xt+]^{\alpha-1}(-x)}{[-t]^{\alpha}} = x^{\alpha}.$$

Teorema 2 Domínio de atração minimal de $W_2(x)$
A) A distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de $W_2(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}}, x \leq 0, (\alpha > 0)$ se, e somente se,

$$\lim_{t \downarrow -\infty} \frac{F(t)}{F(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

B) A distribuição F pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x) = e^{(-x)^{-\alpha}}, x \geq 0 (\alpha > 0)$ se, e somente se,

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

Domínio de Atração

Exemplo 2 A função de distribuição

$$\overline{F}(x) = kx^{-\alpha}, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x)$, pois

$$\lim_{t \downarrow -\infty} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = \frac{kt^{-\alpha}}{kt^{-\alpha}x^{-\alpha}} = x^{\alpha}.$$

Domínio de Atração

Teorema 3 Domínio de atração minimal de $\Lambda(x)$ A distribuição F pertence ao domínio de atração de $\Lambda(x) = 1 - e^{-e^x}$ se existe x_0 tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0 + \varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ e

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{d}{dx}[\frac{1}{\phi'(x)}] = 0,$$

onde $\phi(x) = -\ln F(x)$.

Von Mises (1939) apresentou condições para que uma função de distribuição F pertença ao domínio de atração maximal da distribuição de Gumbel. Λ^*.

Domínio de Atração

Teorema 4 Domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$
A) Considere a função de distribuição $F(x)$, com $F(x) < 1, \forall x$ e

$$\lim_{x\uparrow\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0,$$

onde $r(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$. Então F pertence ao domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$, com $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(b_n)}$.

B) Se existe x_1 tal que $F(x_1) = 1$ e $F(x_1 - \varepsilon) < 1$, $\forall \varepsilon > 0$ e $\lim_{x\uparrow x_1} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0$, então F pertence ao domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$.

Domínio de Atração

Exemplo A função de distribuição

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty$$

pertence ao domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$.
Temos que

$$\overline{F}(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}, \quad r(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Portanto

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = \lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[1+e^{-x}] = \lim_{x\downarrow-\infty} -e^{-x} = 0.$$

Como $F^{-1}(y) = -\ln(\frac{1}{y}-1)$, $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ implica que
$b_n = F^{-1}(\frac{n-1}{n}) = ln(n-1)$.

Domínio de Atração

Em adição $f(b_n) = \frac{n-1}{n^2}$ implica que $a_n = \frac{1}{nf(b_n)} = \frac{n}{n-1}$.
Portanto

$$F^n(a_n x + b_n) = F^n(\frac{n}{n-1}x + \ln(n-1)) = (\frac{1}{1+e^{-(\frac{n}{n+1}x+\ln(n-1))}})^n =$$

$$(1-(-\frac{e^{-\frac{n}{n-1}x}}{n-1}))^{-n}.$$

e

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = e^{(-e)^{-x}}$$

.

Domínio de Atração

Lema 2 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias indendentes e identicamente distribuidas com uma função de distribuição contínua F e sejam $U_n = nF(X_{(n;1)})$ e $V_n = n[1 - F(X_{(n;n)}]$. Então, $U_n \to^D Exp[1]$ e $V_n \to^D Exp[1]$.

Prova

$$P(V_n \leq v) = P(n[1 - F(X_{(n;n)} \leq v) = P(F(X_{(n;n)} \geq 1 - \frac{v}{n}) =$$

$$1 - P(F(X_{(n;n)} \leq 1 - \frac{v}{n}) = 1 - P(X_{(n;n)} \leq F^{-1}(1 - \frac{v}{n})) =$$

$$1 - P(X_1 \leq F^{-1}(1 - \frac{v}{n})) = 1 - (1 - \frac{v}{n})^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n \leq v) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - \frac{v}{n})^n = 1 - e^{-v}.$$

e $V_n \to^D Exp[1]$.