**MAE224 - Probabilidade II**
**RESOLUCÃO - LISTA 13/14 - CLASSE**
Prof. Vanderlei C. Bueno

1. Se para todo $k \in R$, existem constantes $\alpha_k$ e $\beta_k$ tais que $G^k(\alpha_k x+\beta_k) = G(x), \quad \forall x \in R$, então $G$ é estável através do máximo. Prove que

   (a)
   $$W_2^*(x) = \exp[(-x)^{-\alpha}], \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0$$
   é estável através do máximo.

   **Solução:**

   Sejam $\alpha_k = k^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\beta_k = 0$.
   $$W^*(\alpha_k x + \beta_k) = W^*(k^{\frac{1}{\alpha}}.x) = \exp[-(k^{\frac{1}{\alpha}}.x)^{-\alpha}] = \exp[\frac{-1}{k}x^{-\alpha}].$$
   Portanto
   $$W^{*k}(\alpha_k x + \beta_k) = \exp[\frac{-1}{k}x^{-\alpha}]^k = \exp[-x^{-\alpha} = W_2^*(x).$$

   (b)
   $$\Lambda^*(x) = \exp[-\exp(-x)], \Lambda\Lambda \quad -\infty < x < \infty,$$
   é estável através do máximo.

   **Solução:**

   Sejam $\alpha_k = 1$ e $\beta_k = \ln(\frac{1}{k})$.
   Assim
   $$\Lambda^*(\alpha_k x + \beta_k) = \exp[-\exp[-(x+\ln(\frac{1}{k})]]] = \exp-[\exp(-x).\exp(\ln(\frac{1}{k}))] = \exp-[\frac{\exp(-x)}{k}].$$
   Portanto
   $$\Lambda^{*k}(\alpha_k x + \beta_k) = \{\exp-[\frac{\exp(-x)}{k}]\}^k = \exp[-\exp(-x)].$$

2. **Teorema - Domínio de atração minimal de** $W_1(x)$
   A distribuição $F$ pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, x \geq 0, (\alpha > 0)$ se, e somente se,

   A) Existe $x_0$ tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0 + \varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$;
   B)) $\lim_{t\downarrow 0}[\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = x^{\alpha}$, para $x > 0, (\alpha > 0)$.

   (a)
   Use o Teorema acima para provar que a função de distribuição
   $$F(x) = \frac{x^2}{\theta^2}, \quad 0 \leq x < \theta; \quad 0, c.c.$$
   pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0.$

   **Solução:**

Temos que $x_0 = 0$ e

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(xt + x_0)}{F(t + x_0)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{x^2t^2}{t^2} = x^2.$$

(b) Construa um intervalo de confiança para $\theta$ com coeficiente de confiança de 90%.

**Solução:** Concluimos que $\alpha = 2$. Da prova do Teorema verificamos que $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$

Como $F^{-1}(x) = \theta.\sqrt{x}$, $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n}) = \theta.\sqrt{\frac{1}{n}}$.
Portanto

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(n;1)} - 0)}{\theta} \to^D 1 - \exp[-x^2].$$

O limite superior do intervalo padronizado é o valor $x$ tal que:

$$1 - \exp[-x^2] = 0,95 \Leftrightarrow \exp[-x^2] = 0,05 \Leftrightarrow -x^2 = \ln(0,05) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(0,05)}.$$

O limite inferior do intervalo padronizado é o valor $x$ tal que:

$$1 - \exp[-x^2] = 0,05 \Leftrightarrow \exp[-x^2] = 0,95 \Leftrightarrow -x^2 = \ln(0,95) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(0,95)}.$$

Portanto

$$P(\sqrt{-\ln(0,95)} \leq \sqrt{n}X_{\frac{(n;1)}{\theta}} \leq \sqrt{-\ln(0,05)}) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{1}{\sqrt{-\ln(0,05)}} \leq \frac{\theta}{\sqrt{n}X_{(n;1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{-\ln(0,95)}}) = 0,9.$$

Assim o intervalo de confiança é:

$$\frac{\sqrt{n}x_{(n;1)}}{\sqrt{-\ln(0,05)}}; \frac{\sqrt{n}x_{(n;1)}}{\sqrt{-\ln(0,95)}}),$$

(c) Prove que $F$ tem contato terminal de ordem m. Qual o valor de m? Calcule $P(X_{(n;1)} > 150)$. Na Aula

14 temos a definição
$F$ tem um contato terminal de ordem $m$ em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{0;n}) = 0$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{1;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{1;n}) \neq 0$.

**Solução:**

Observe que
$F(\xi_{0;n}) = 0$ *se* $\xi_{0;n} = 0$; $F^{'}(x) = \frac{4x}{\theta^2}$ *e* $F^{'}(\xi_{0;n}) = 0$; $F^{''}(x) = \frac{4}{\theta^2} = F^{''}(\xi_{0;n}) \neq 0$.
Portanto $F$ tem contato terminal de ordem 1.
$a_n = [\frac{2!}{n.\frac{\theta^2}{2}}]^{\frac{1}{2}} = \frac{\theta}{\sqrt{2n}}$ e $b_n = 0$.

$$P(X_{(n;1)} > 150) = 1 - P(X_{(n;1)} \leq 150) = P(\frac{X_{(n;1)} - 0}{\frac{\theta}{\sqrt{2n}}} \leq \frac{150}{\frac{\theta}{\sqrt{2n}}}) \to 1 - \exp[-2\frac{150\sqrt{2n}}{\theta}].$$

3. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição logística

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp -x}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(a)Prove que $F$ é do tipo exponencial.

(Aula 14)
$F$ é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se $F$ é continuamente diferenci' avel e

$$\frac{f(x)}{F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

quando $x \to -\infty$.

**Solução:**

Observe que a função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

$$f^{'}(x) = -e^{-x}(1+e^{-x})^2 + 2(1+e^{-x})e^{-x}e^{-x}\ over(1+e^{-x})^4 =$$
$$\frac{e^{-x}[2e^{-x}-1-e^{-x}}{(1+e^{-x})^3]} = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$$

$$f^{''}(x) = \frac{(-2e^{-2x}+e^{-x})(1+e^{-x})^3 + 3(1+e^{-x})^2e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+^{-x})^6} =$$
$$\frac{e^{-x}(1-2e^{-x})(1+e^{-x}) + 3e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^4}$$

Consequentemente, para $x$ nas vizinhanças de $-\infty$, temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.(1+\exp -x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})} \approx \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = 1.$$

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}.\frac{(1+e^{-x})^2}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}} \approx \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = 1.$$

$$\frac{f^{''}(x)}{f'(x)} = \frac{e^{-x}(1-2e^{-x})(1+e^{-x}) + 3e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^4}.\frac{(1+e^{-x})^3}{e^{-x}(e^{-x}-1)} \approx 1.$$

(b) Encontre as sequências de constantes constantes $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ e a distribuição assintótica de $\frac{X_{(n;1)}-b_n}{a_n}$. (Aula 14)

**Teorema 2**
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição $F$ do tipo exponencial. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}-\xi_{0;n}}{a_n} \leq x) = 1 - e^{-e^x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

**Solução:**

Como $F(x) = \frac{1}{1+\exp -x}$

$$F(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = n \Leftrightarrow e^{-x} = n - 1 \Leftrightarrow \xi_{(n;0)} = -\ln(n-1).$$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Portanto

$$f(\xi_{(n;0)}) = \frac{e^{\ln(n-1)}}{(1+n-1)^2} = \frac{n-1}{n^2}.$$

$a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})} = \frac{n}{n-1}$. e $b_n = -\ln(n-1)$.

4. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição

$$F(x) = 1 - (1-x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

(a) Prove que a distribuiçã $F$ tem contato terminal de ordem $m$ no ponte $\xi_1 = 1$. Qual o valor de m?

Na Aula 14 temos a definição

$F$ tem um contato terminal de ordem $m$ em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{1;n}) = 1$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{1;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{1;n}) \neq 0$.

**Solução:**

Observe que $F(1) = 1$;

$F^{'}(x) = 3(1-x)^2, \quad F^{'}(1) = 0$;

$F^{''}(x) = -6(1-x), \quad F^{''}(1) = 0$ e

$F^{'''}(x) = 6 > 0$. Portanto $F$ tem contato terminal de ordem 2 no ponte $\xi_1 = 1$

(b) Encontre a sequência de constante $(a_n)_{n\geq 1}$ e a distribuição assintótica de $\frac{X_{(n;n)}-\xi_1}{a_n}$.

**Solução:**

$$a_n = [\frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{nF^{m+1}(\xi_{(n;1)})}]^{\frac{1}{m+1}} = [\frac{-1.6}{n6}]^{\frac{1}{3}} = (\frac{-1}{n})^{\frac{1}{3}}.$$

**Portanto**

$$P(-n^{\frac{1}{3}}(X_(n;n) - 1) \leq t) \to e^{-(-t)^3}., \quad t \leq 0.$$