Equações lineares de 2ª ordem

São equações da forma:

(1) $$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = g(x)$$

onde a linha simboliza a derivação com relação a x.

Também encontramos expressões da forma:

(2) $$\hat{P}(x)\,y'' + \hat{Q}(x)\,y' + \hat{R}(x)\,y = \hat{G}(x).$$

É evidente que se dividimos por $\hat{P}(x)$ a equação (2), ela se reduz à equação (1) com:

$$p(x) = \frac{\hat{Q}(x)}{\hat{P}(x)}, \quad q(x) = \frac{\hat{R}(x)}{\hat{P}(x)}, \quad g(x) = \frac{\hat{G}(x)}{\hat{P}(x)}.$$

<u>Definição</u>: uma equação diferencial linear de 2ª ordem é <u>homogênea</u> se o termo $g(x)$ em (1), ou o termo $\hat{G}(x)$ em equação (2), for nulo $\forall x$. Caso contrário, a equação é chamada <u>linear não-homogênea</u>.

1) Considere na equação (2), $\hat{G}(x)=0$, ~~...~~ e que as funções $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ são constantes, assim estamos considerando a equação diferencial linear da forma:

(3) $$a y'' + b y' + c y = 0,$$ onde a, b, c são constantes.

Procuramos por soluções exponenciais da equação (3).

Suponha que $y = e^{rx}$, onde $r \in \mathbb{R}$.

Então obtemos a equação:

$$a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = 0, \quad \text{pois } y' = r e^{rx}, \; y'' = r^2 e^{rx}.$$

$$(ar^2 + br + c)\,e^{rx} = 0.$$

A equação $ar^2 + br + c = 0$ é chamada <u>equação característica</u>.

Antes de estudar as soluções da equação característica, definimos:

<u>Definição</u>: <u>Conjunto fundamental de soluções</u>

Um conjunto de soluções y_1, y_2 da equação linear homogênea, cujo Wronskiano $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ não é nulo é chamado um conjunto fundamental de soluções. Isto significa que se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes a solução geral da equação linear de 2ª ordem homogênea é dada pela combinação linear de y_1, y_2; isto é pela equação:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad \text{onde } C_1, C_2 \text{ são constantes.}$$

<u>Observe</u>: se $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, e y_1, y_2 forem soluções, então $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, C_i constantes, também é solução:

<u>De fato</u>: $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$, $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' \Rightarrow$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(x) C_1 y_1' + p(x) C_2 y_2' + q(x) C_1 y_1 + q(x) C_2 y_2 =$$

$$= C_1 \left[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 \right] + C_2 \left[y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 \right] = 0.$$

Observe também que toda solução de $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$, pode ser expressa como uma combinação linear de duas soluções y_1, y_2, sempre e quando, for possível escolher constantes C_1 e C_2 de modo que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, obedeça as condições iniciais; isto é se para qualquer $x_0 \in I$, e qualquer conjunto y_0, y_0', devemos poder determinar C_i tais que:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$ sejam satisfeitas.

Mas isto só é possível se

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$ não for nulo em $x = x_0$.

↓ Wronskiano.

<u>Teorema</u>: Se as funções $p(x)$, e, $q(x)$ forem contínuas num intervalo aberto I, e se as funções y_1, y_2 forem soluções da equação linear homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, e se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, para pelo menos um ponto $x \in I$, então qualquer solução da equação linear homogênea pode ser expressa como uma combinação linear das soluções y_1, y_2.

(Logo y_1, y_2 formam um conjunto fundamental de soluções).

Voltando ao estudo das equações lineares homogêneas de coeficientes constantes (3) $ay'' + by' + cy = 0$, com a, b, c constantes. Assumimos que $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. Logo temos para solucionar equação (3), devemos estudar as soluções da equação característica

$$(4) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

<u>Caso 1</u>: Se as raízes da equação característica (4) forem <u>reais e diferentes</u>, então temos que

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

são soluções de (4), e assim $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ é também solução de (4), pois $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$.

↓ pois $r_2 \neq r_1$.

pelo teorema anterior podemos então denominar

$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ a solução geral de (4).

Exemplo: Achar a solução do problema de valor inicial:

$$4y'' - 8y' + 3y = 0 \,, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Solução: Equação característica: $4r^2 - 8r + 3 = 0$, as suas raízes são: $(2r-3)(2r-1) = 0 \iff r = \frac{3}{2}, \; r = \frac{1}{2}$.

Logo $y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$ é solução geral.

$y' = c_1 \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x} + c_2 \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$. As condições iniciais dão:

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2 \end{cases} \iff \begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{2} \\ c_2 &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Logo a solução ao problema de valor inicial é:

$$y = -\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}x} + \frac{5}{2} e^{\frac{x}{2}}.$$

Caso 2: Raízes complexas: Como $ar^2 + br + c = 0$ com a, b, c são constantes, temos que suas raízes são dadas pela:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo se acontece que $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ as raízes são complexas conjugadas: $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$.

$\Rightarrow y_1 = e^{(\lambda + i\mu)x}$, $y_2 = e^{(\lambda - i\mu)x}$ são soluções complexas.

e $y_1 + y_2 = e^{\lambda x}(\cos(\mu x) + i \operatorname{sen}(\mu x)) + e^{\lambda x}(\cos(\mu x) - i \operatorname{sen}(\mu x))$

$= 2 e^{\lambda x} \cos(\mu x)$, é solução e $\quad y_1 - y_2 = e^{\lambda x}(\cos(\mu x) + i\,sen(\mu x)) - e^{\lambda x}(\cos(\mu x) - i\,sen(\mu x))$

$= 2e^{\lambda x} i\,sen(\mu x)$ é solução.

Desprezando os fatores 2 e 2i obtemos um par de soluções reais: $\quad y_1 = e^{\lambda x}\cos(\mu x), \quad y_2 = e^{\lambda x} sen(\mu x).$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x}\cos(\mu x) & e^{\lambda x} sen(\mu x) \\ e^{\lambda x}(\lambda\cos(\mu x) - \mu\,sen(\mu x)) & e^{\lambda x}(\lambda\,sen(\mu x) + \mu\cos(\mu x)) \end{vmatrix} =$$

$= \mu e^{2\lambda x}$.

Como $\mu \neq 0$, $W(y_1, y_2) \neq 0$ e portanto $y_1 = e^{\lambda x}\cos(\mu x)$, $y_2 = e^{\lambda x} sen(\mu x)$ formam um conjunto fundamental de soluções.

logo se as raizes da equação forem complexos $\lambda \pm i\mu$, $\mu \neq 0$, então a solução geral da equação (3) é

$$y = c_1 e^{\lambda x}\cos(\mu x) + c_2 e^{\lambda x} sen(\mu x)$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrários.

<u>Exemplo</u>: Achar solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 16y'' - 8y' + 145y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Solução</u>: $\quad 16r^2 - 8r + 145 = 0$, as raizes são:

$r = \dfrac{1 \pm \sqrt{-144}}{4}$, $\quad r = \dfrac{1 \pm 12i}{4}$, isto é:

$r_1 = \frac{1}{4} + 3i$, $\quad r_2 = \frac{1}{4} - 3i$

Logo a solução geral é: $y = C_1 e^{\frac{x}{4}}\cos(3x) + C_2 e^{\frac{x}{4}}\operatorname{sen}(3x)$.

Como $y(0) = -2$ e $y'(0) = 1$, $\Rightarrow C_1 = -2$, e, como

$$y' = C_1\left[\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}\cos(3x) - 3e^{\frac{x}{4}}\operatorname{sen}(3x)\right] + C_2\left[\frac{1}{4}e^{x/4}\operatorname{sen}(3x) + 3e^{x/4}\cos(3x)\right]$$

$\Rightarrow y'(0) = \frac{C_1}{4} + 3C_2 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{4} + 3C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$.

Logo a solução ao problema de valor inicial é:

$$y = -2e^{x/4}\cos(3x) + \frac{1}{2}e^{x/4}\operatorname{sen}(3x).$$

Caso 3: Raízes repetidas:

Se a equação característica $ar^2 + br + c = 0$ tem raízes reais iguais $r_1 = r_2$, então $b^2 - 4ac = 0$. E portanto $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. Logo temos uma solução $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$.

Precisamos construir uma segunda solução que seja linearmente independente da solução y_1.

Suponha que a nova solução seja da forma $y = v(x)y_1(x)$, isto é seja da forma $y = v(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$, onde $v(x)$ é uma função diferenciável em I. Logo

$$y' = v' e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-\frac{b}{2a}x}, \text{ e},$$

$$y'' = v'' e^{-\frac{bx}{2a}} - v'\frac{b}{2a}e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a}v' e^{-\frac{bx}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-\frac{bx}{2a}} =$$

$$= v'' e^{-\frac{bx}{2a}} - \frac{b}{2a}v' e^{-\frac{bx}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2}v(x)e^{-\frac{bx}{2a}}.$$

Logo substituindo em $ay'' + by' + cy = 0$, temos que:

$$a\left(v'' - \frac{b}{a}v' + \frac{b^2}{4a^2}v\right) + b\left(v' - \frac{b}{2a}v\right) + cv = 0.$$

ou: $a v'' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) v = 0$ ou

$a v'' + \left(\cancel{c - \frac{b^2}{4a}}\right) v = 0 \Rightarrow v'' = 0$ (pois $4ac - b^2 = 0$ e $a \neq 0$).

Logo $v(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow y = v e^{-\frac{bx}{2a}} = (c_1 x + c_2) e^{-\frac{bx}{2a}} \Rightarrow$

$y = c_1 x e^{-\frac{bx}{2a}} + c_2 e^{-\frac{bx}{2a}}$. Assim y é combinação linear de duas soluções: $y_1 = e^{-\frac{bx}{2a}}$ e, $y_2 = x e^{-\frac{bx}{2a}}$.

Observe que $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\frac{bx}{a}}$. Logo como $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, $\forall x$, as soluções y_1, y_2 constituem um conjunto fundamental de soluções, e assim temos que:

$y = c_1 x e^{-\frac{bx}{2a}} + c_2 e^{-\frac{bx}{2a}}$ é a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$ quando as raízes da característica são iguais.

<u>Exemplo</u>: Achar a solução de $y'' - y' + \frac{y}{4} = 0$.

<u>Solução</u>: equação característica $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$

$(r - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ multiplicidade 2. portanto a solução geral é $y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2}$.