A Formulação de Newton para a 3ª Lei de Kepler

Já vimos que a 3ª Lei de Kepler coloca descreve uma proporção matemática entre a distância de um planeta ao Sol e o período da sua órbita (tempo que ele leva para completar uma volta ao redor do Sol). Essa relação pode ser escrita da seguinte forma:

$$r^3 = k \cdot T^2$$

sendo **r** a distância média do planeta até o Sol, **T** o período da sua órbita, e **k** uma “constante de proporcionalidade”. Esse **k** é o mesmo para quaisquer corpos que orbitam o Sol. Mas o que ele significa?

No final do século XVII, Isaac Newton formulou a famosa Lei da Gravitação Universal, que relaciona a força da gravidade com a massa dos corpos e a distância entre eles. Matematicamente temos:

$$F_g = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$

onde $\mathbf{F_g}$ é a força gravitacional, **M** e **m** são as massas dos corpos, **r** é a distânci entre eles, e **G** é uma “constante gravitacional universal”, que é válida par quaisquer corpos (não só aos planetas orbitando o Sol, como na 3ª lei d Kepler).

A Formulação de Newton para a 3ª Lei de Kepler

Se considerarmos, simplificadamente, que as órbitas são circulares, podemos afirmar que a força gravitacional atuante sobre um corpo em órbita de outro é uma **força centrípeta** (ou seja, que aponta para o centro da órbita circular). A fórmula que relaciona a força centrípeta com o período do movimento é dada por:

$$F_c = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

onde $\mathbf{F_c}$ é a força centrípeta, **m** é a massa do corpo em órbita, **r** é a sua distância em relação ao centro da órbita, e **T** é o período da órbita. Podemos, então, combinar as duas equações: a da Gravitação Universal e a da força centrípeta:

$$F_g = F_c \qquad G\frac{M \cdot m}{r^2} = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Como se vê, o termo **m** (massa do corpo em órbita) está nos dois lados da equação e, portanto, pode ser removido. Isso significa que, com as simplificações que adotamos, <u>a massa do corpo em órbita não influencia o período e altitude da órbita</u>.

$$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}r\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Essa aproximação funciona muito bem quando as órbitas são praticamente circulares e a massa do corpo em órbita é muito menor do que o a do corpo sendo orbitado.

A Formulação de Newton para a 3ª Lei de Kepler

Podemos continuar “mexendo” nessa equação para chegarmos a uma relação entre o período da órbita e a distância entre os corpos:

$$\frac{GM}{r^2} = r\frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow 4\pi^2 r^3 = GMT^2 \Rightarrow \boxed{r^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Como podemos ver, essa formulação é bastante parecida com a 3ª lei de Kepler! Ademais, agora sabemos o significado daquela constante **k**:

$$k = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Isso significa que **k** somente é constante no caso de órbitas ao redor de um mesmo corpo central (por exemplo, os planetas orbitando o Sol). Se mudarmos o corpo central (por exemplo, satélites artificiais ao redor da Terra), então o valor de **k** será outro, pois o **M**, neste caso, será a massa da Terra, não mais a massa do Sol. Mas note que, em qualquer caso, **a relação continua sendo independente da massa do objeto em órbita (m não está na equação)**.

Note também que ainda há uma constante na nova equação: **G**. Ao contrário de **k**, porém, **G** é uma **constante universal**. Ela vale para quaisquer órbitas, ao redor de qualquer corpo. O valor de **G**, em unidades do S.I., é:

$$G \cong 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

A Formulação de Newton para a 3ª Lei de Kepler

Armados da formulação newtoniana da 3ª lei de Kepler: $$r^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

e conhecendo o valor de G: $$G \cong 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

podemos calcular a relação entre a distância e o período da órbita de quaisquer corpos, desde que saibamos a massa do objeto central e que possamos usar as simplificações que foram adotadas (órbita circular e **M** >> **m**).

Uma linha imaginária entre o objeto em órbita e o objeto central "varre" áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Por fim, vale destacar que, aplicando a 2ª lei de Kepler a uma órbita circular, temos que a velocidade do corpo em órbita será constante. Podemos calcular essa **velocidade orbital** por meio da relação entre o período da órbita (**T**) e o caminho percorrido pelo corpo, que nada mais é do que a circunferência da órbita. Logo, temos que:

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$$