Domínio de Atração

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Novembro de 2020

Domínio de Atração

As definições e resultados que seguem estão na pág 226 do livro ”*From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*” de P.K.Sen, J.M.Singer e A.C.P.Lima (2010)

Domínio de Atração

Definição 1

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F, então:
A) F é do tipo Cauchy, se existirem $k > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^k F(x) = c.$$

Domínio de Atração

B) F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenci' avel e

$$\frac{f(x)}{F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

quando $x \to -\infty$.

Domínio de Atração

C) F tem um contato terminal de ordem m em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{1;n}) = 1$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{1;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{1;n}) \neq 0$.

Observação 1

Distribuições do tipo exponencial tem momentos finitos de todas as ordens e incluem aquelas comumente empregadas nos métodos estatísticos, tais como a exponencial, normal e gama. Por outro lado as distribuições do tipo Cauchy não tem momentos finitos de ordem $\geq k$ e leva o nome da distribuição típica de Cauchy, para a qual, $k = 1$. Em geral, as distribuições assintóticas dos mínimos amostrais dependem do tipo de distribuição envolvida.

Domínio de Atração

As definições A e B são adequadas para analisar distribuições assintóticas para o mínimo de variáveis aleatórias. para estudarmos as distribuições assintóticas para o máximo de variáveis aleatórias pequenas modificações devem ser consideradas: As distribuições do tipo Cauchy deve ser analisada na vizinhança de ∞

$$\lim_{x \to \infty} |x|^k \overline{F}(x) = c.$$

As distribuições do tipo exponencial são tais que

$$-\frac{f(x)}{1-F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx \ldots .$$

Exemplo 1 A distribuição de Cauchy padrão é do tipo Cauchy com $k = 1$ pois:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi^{-1} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+y^2} dy}{\frac{1}{|x|}} \approx \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{|x|^2}} = 1.$$

Domínio de Atração

A distribuição normal padrão é do tipo exponencial, pois nas vizinhança de $-\infty$ temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{x}(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{y^2}{2}}dy} \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - (\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)} \approx -x + \frac{1}{x} \approx -x$$

na vizinhança de $-\infty$

A distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ tem um contato terminal de ordem 0 em um ponto $\xi_{1;n} = \theta$.

Teorema 1 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq t) = 1 - e^{-(-x)^{-k}}, \quad x < 0,$$

onde $\xi_{0;n}$ é tal que $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$.

Domínio de Atração

Prova Observe que

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = \frac{F(X_{(n;1)})}{\frac{1}{n}} = \frac{F(X_{(n;1)})}{F(\xi_{0;n})} =$$

$$|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k \cdot \frac{|X_{(n;1)}|^k F(X_{(n;1)})}{F(\xi_{0;n})|\xi_{0;n}|^k} \to |\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k \cdot \frac{c}{c}.$$

Portanto, para $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}}| \geq |x|) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k \geq |x|^{-k}) = 1 - e^{-|x|^{-k}} = 1 - e^{-(-x)^{-k}}.$$

Corolário 1 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}}{\xi_{1;n}} \leq t) = e^{(-t)^{-k}}, \quad t \geq 0,$$

onde $\xi_{1;n}$ é tal que $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$.

Domínio de Atração

Teorema 2

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo exponencial. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n} \leq x) = 1 - e^{-e^{x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Domínio de Atração

Prova

Usando a série de Taylor em torno de $\xi_{0;n}$, temos

$$F(\xi_{0;n}) + s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\xi_{0;n})s^n}{n!} = F(\xi_{0;n}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})s^k}{k!}.$$

Domínio de Atração

Portanto

$$F(X_{(n;1)} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!}$$

e

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k a_n^k}{k!},$$

onde $t = \frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Domínio de Atração

Contudo, podemos escrever

$$n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k}{(nf(\xi_{0;n}))^k k!} = \frac{t^k}{k!}[\frac{F(\xi_{0;n})^k}{f(\xi_{0;n})^k}\frac{f^{k-1}(\xi_{0;n})}{f^{k-2}(\xi_{0;n})}\frac{f^{k-2}(\xi_{0;n})}{f^{k-3}(\xi_{0;n})}\cdots$$

$$\frac{f^1(\xi_{0;n})}{f^0(\xi_{0;n})}\frac{f^0(\xi_{0;n})}{F(\xi_{0;n})}] \approx \frac{t^k}{k!}$$

Concluímos

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \approx e^t$$

com

$$P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = P(t \leq x) = P(e^t \leq e^x) = P(U_n \leq e^x)$$

e

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = \lim_{n \to \infty} P(U_n \leq e^x) = 1 - e^{-e^x}.$$

Corolário 2

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo exponencial. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{1;n})}$.

Teorema 3 Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F com contato terminal de ordem m no ponto $\xi_{1;n}$, $(F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n})$. Então existe uma sequência de constante $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = e^{-(-t)^{m+1}} \quad se \quad t \leq 0 \quad e \quad 1 \quad se \quad t > 0.$$

onde $a_n = [\frac{(-1)^m (m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$.

Domínio de Atração

Prova Considere o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto $\xi_{1;n}$

$$F(\xi_{1;n} - s) =$$

$$F(\xi_{1;n}) + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k s^k F^{(k)}}{k!} + \frac{(-1)^{m+1} s^{m+1} F^{(m+1)}(\xi_{1;n} - \theta s)}{(m+1)!} =$$

$$F(\xi_{1;n}) + \frac{(-1)^{m+1} s^{m+1} F^{(m+1)}(\xi_{1;n} - \theta s)}{(m+1)!} \quad 0 < \theta < 1.$$

Observe que

$$V_n = n[1 - F(X_{(n;n)}] = n[1 - F(\xi_{1;n})] + n[F(\xi_{1;n}) - F(X_{(n;n)}] =$$

$$n[F(\xi_{1;n}) - F(X_{(n;n)}].$$

Fazendo $s = \xi_{1;n} - X_{(n;n)}$, temos:

$$V_n = \frac{(-1)^m n}{(m+1)!}(\xi_{1;n} - X_{(n;n)})^{m+1} F^{m+1}(\xi_{1;n}) \frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n} + \theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}.$$

Domínio de Atração

Fazendo $a_n = [\frac{(-1)^m(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$ e $W_n = \frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n}+\theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}$ temos

$$V_n = (\frac{\xi_{1;n} - X_{(n;n)}}{a_n})^{m+1}.W_n = [-(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1}.W_n.$$

Como $W_n \to^P 1$, concluimos, pelo teorema de Slutsky, que a distribuição assintótica de $[-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})^{m+1}$ é a mesma de V_n e para $t \leq 0$,

$$P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = P([-(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1} \geq (-t)^{m+1})$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = e^{[-(-t)^{m+1}]}, \quad se \quad t \leq 0 \quad e \quad 1 \quad se \quad t > 0.$$

Exemplo 2
Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$.
Assim $F(x) = \frac{x}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e $F^{(1)}(x) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e portanto F tem contato terminal de ordem $m = 0$ e temos $a_n = \frac{\theta}{n}$ com $\xi_{1;n} = \theta$. Concluímos

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{n}{\theta}(X_{(n;n)} - \theta) \leq t) = e^t, t \leq 0.$$