magnification=1700

Provinha 3

TIPO 1

1)a) Seja $X_1, X_2, ..., X_{25}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal com média μ e variância 1. Construa um intervalo de confiança para μ, com coeficiente de 80% porcento de confiança, utilizando o $0,4$-ésimo quantil amostral $\widehat{\xi}_{(0,4)} = X_{(n;k)}$.

b) Qual seria sua resposta para a amostra

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...25.$$

Solução

Sabemos que

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \xi_p)}{\gamma} \rightarrow^D N(0,1),$$

onde $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{\gamma}$.

Devemos encontra $\xi_{(0,4)}$ tal que

$$P(X \leq \xi_{(0,4)}) = 0,4 \Leftrightarrow P(Z \leq \xi_{(0,4)} - \mu) =$$

$$0,4 \Leftrightarrow \xi_{(0,4)} - \mu = -0,26 \Leftrightarrow \xi_{(0,4)} = \mu - 0,26.$$

Como $f(x) = 0,4e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$, temos $f(\xi_{(0,4)}) = 0,4e^{-\frac{1}{2}(-0,26)^2} = 0,39$.

Portanto $\gamma^2 = \frac{0,4.0,6}{(0,39)^2} = 1,58$ e $\gamma = 1,26$.

Temos que

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \mu + 0,26)}{1,26} \rightarrow^D N(0,1),$$

e podemos afirmar que

$$P(-1,29 \leq \frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \mu + 0,26)}{1,26} \leq 1,29) = 0,8 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,29}{\sqrt{n}} \leq \frac{(X_{(n;k)} - \mu + 0,26)}{1,26} \leq \frac{1,29}{\sqrt{n}}) = 0,8 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,29}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-X_{(n;k)} + \mu - 0,26)}{1,26} \leq \frac{1,29}{\sqrt{n}}) = 0,8 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,29}{\sqrt{n}} + \frac{X_{(n;k)}}{1,26} + 0,21 \leq \mu \leq \frac{1,29}{\sqrt{n}} + \frac{X_{(n;k)}}{1,26} + 0,21 = 0,8$$

Portanto o intervalo de confiança é

$$(\frac{-1,29}{\sqrt{n}} + \frac{x_{(n;k)}}{1,26} + 0,21; \frac{1,29}{\sqrt{n}} + \frac{x_{(n;k)}}{1,26} + 0,214)$$

b)

Para a amostra

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...25.$$

temos

$$(\frac{-1,29}{\sqrt{25}}+\frac{11}{1,26}+0,214;\frac{1,29}{\sqrt{25}}+\frac{11}{1,26}+0,214)=(8,4;9,2)$$

2) a) Seja $X_1, X_2, ..., X_{25}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal com média μ e variância 1. Teste ao nível de 10% de significância a hipótese

$$H_0:\mu=10 \quad X \quad H_a:\mu\neq 10,$$

utilizando o $0,4$-ésimo quantil amostral $\widehat{\xi}_{(0,4)}=X_{(n;k)}$.

b) Qual sua decisão se a amostra fosse:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,.......25.$$

Solução

Conhecemos que um teste bilateral a 0,1 de significância é equivalente a um intervalo de confiança ao nível de 0,9 de confiança.

O intervalo é dado por

$$P(-1,64\leq\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)}-\mu+0,26)}{1,26}\leq 1,64)=0,9\Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}}\leq\frac{(X_{(n;k)}-\mu+0,26)}{1,26}\leq\frac{1,64}{\sqrt{n}})=0,9\Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}}\leq\frac{(-X_{(n;k)}+\mu-0,26)}{1,26}\leq\frac{1,64}{\sqrt{n}})=0,9\Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}}+\frac{X_{(n;k)}}{1,26}+0,214\leq\mu\leq\frac{1,64}{\sqrt{n}}+\frac{X_{(n;k)}}{1,26}+0,214=0,9$$

Portanto o intervalo de confiana é

$$(\frac{-1,64}{\sqrt{n}}+\frac{x_{(n;k)}}{1,26}+0,214;\frac{1,64}{\sqrt{n}}+\frac{x_{(n;k)}}{1,26}+0,214).$$

b) No caso em que a amostra é

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,.......25.$$

temos

$$(\frac{-1,64}{\sqrt{25}}+\frac{11}{1,26}+0,214;\frac{1,64}{\sqrt{25}}+\frac{11}{1,26}+0,214)=(8,6;9,3$$

Como 12 não pertence ao intervalo, rejeitamos H_0.

3)

a) Seja $X_1, X_2, ..., X_{25}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal com média 0 e variância σ^2. Construa um intervalo de confiança para σ,com coeficiente de 90% porcento de confiança, utilizando o $0,8$-ésimo quantil amostral $\widehat{\xi}_{(0,8)}=X_{(n;k)}$.

b) Qual sua resposta se a amostra fosse:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,.......25.$$

Solução

Devemos encontrar $\xi_{(0,8)}$ tal que

$$P(X \leq \xi_{(0,8)}) = 0,8 \Leftrightarrow P(Z \leq \frac{\xi_{(0,8)}}{\sigma}) = 0,8$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi_{(0,8)}}{\sigma} = 0,85 \Leftrightarrow \xi_{(0,8)} = 0,85.\sigma.$$

Como $f(x) = 0,4e^{\frac{-1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$, temos $f(\xi_{(0,8)}) = \frac{0,4}{\sigma}e^{\frac{-1}{2}(0,85)^2} = \frac{0,28}{\sigma}$.
Portanto $\gamma^2 = \frac{0,8.0,2}{(\frac{0,28}{\sigma})^2} = 2.\sigma^2$, e $\gamma = 1,41.\sigma$.
Concluimos que

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - 0,85\sigma\sigma}{1,41.\sigma} \rightarrow^D N(0,1),$$

e portanto

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_{(n;k)}}{1,41.\sigma} - 0,6 \leq \frac{1,64}{\sqrt{n}}) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P([\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 0,6] \leq \frac{X_{(n;k)}}{1,41.\sigma} \leq [\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{1}{[\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]} \leq \frac{1,41.\sigma}{X_{(n;k)}} \leq \frac{1}{[\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]}) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{0,71.X_{(n;k)}}{[\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]} \leq \sigma \leq \frac{0,71.X_{(n;k)}}{[\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]}) = 0,9.$$

Portanto o intervalo de confiança é

$$(\frac{0,71.x_{(n;k)}}{[\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]}; \frac{0,71.x_{(n;k)}}{[\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 0,6]}).$$

b) No caso em que a amostra é

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,.......25.$$

temos

$$(\frac{0,71.21}{[\frac{1,64}{5} + 0,6]}; \frac{0,71.21}{[\frac{-1,64}{5} + 0,6]}) = (41,5; 54,8).$$

4) a) Seja $X_1, X_2, ..., X_{25}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição normal com média 0 e variância σ^2. Teste ao nível de 10% de significância a hipótese

$$H_0 : \sigma = 23 \quad X \quad H_a : \sigma \neq 23,$$

utilizando o 0,8-ésimo quantil amostral $\widehat{\xi}_{(0,8)} = X_{(n;k)}$

b) Qual sua decisão se a amostra fosse:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,.......25.$$

Solução

a) O problema é o mesmo que o 3).

b) como 23 não pertence ao intervalo $(24,3; 25,41)$ rejeitamos H_0.

5) Seja $X_{(n)})_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média μ_n e Variância σ_k^4. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^6} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|^6] = 0.$$

Solução

Primeiramente note que definindo a variável $Z_k = X_k - \mu_k$ temos $E[Z_k] = 0$ e $Var(Z_k) = \sigma_k^2$. Resolveremos para Z_k.

Como $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^4$,

$$\frac{s_n^2}{n^5} \to \frac{1}{5}; \quad \frac{s_n}{n^{\frac{5}{2}}} \to \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}; \quad \frac{s_n^6}{n^{15}} \to \frac{1}{125}.$$

por outro lado

$$E[|Z_k|^6] = E[Z_k^6] = E[Z_k^{2.3}] = \frac{(k^4)^3 6!}{2^3 3!} = 15k^{12}.$$

e $\sum_{k=1}^{n} E[|Z_k|^6] = 15 \sum_{k=1}^{n} k^{12}$ com

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} E[|Z_k|^6]}{n^{13}} \to \frac{15}{13} = 1,15.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^6} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|^6] =$$

$$\frac{n^{15}}{s_n^6} . \frac{\sum_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|^6]}{n^7} . \frac{n^7}{n^{15}} = 125.1,15.0 = 0.$$