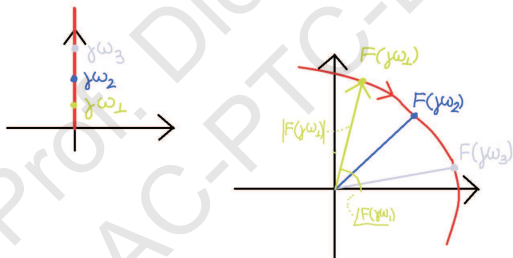


Gráficos de Nyquist 1

- Dada uma função de transferência $F(s)$, se fizermos $s = j\omega$, esta pode ser encarada como uma função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, que descreve uma curva no plano complexo conhecida como *gráfico de Nyquist*.
- $|F(j\omega)|$ é o comprimento do vetor posição, e $\angle F(j\omega)$ o ângulo com o semi-eixo real positivo



Gráficos de Nyquist 2

- Pode-se dividir o gráfico de Nyquist aproximadamente em três regiões: 1) baixas frequências; 2) médias frequências e 3) altas frequências;
- Seja uma função de transferência genérica da forma:

$$F(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^N(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\cdots}, \text{ com } K > 0$$

- O comprimento do vetor $F(j\omega)$ em função de ω é dado por:

$$|F(j\omega)| = \frac{K|1 + j\omega T_a||1 + j\omega T_b|\cdots}{|\omega|^N|1 + j\omega T_1||1 + j\omega T_2|\cdots}$$

- O ângulo em função de ω é:

$$\begin{aligned} \angle F(j\omega) = & \angle K + \angle(1 + j\omega T_a) + \angle(1 + j\omega T_b) + \cdots \\ & - N90 - \angle(1 + j\omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2) - \cdots \quad (1) \end{aligned}$$

- Para as baixas frequências, isto é $\omega \ll \min(T_1^{-1}, \dots, T_a^{-1}, \dots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K}{(j\omega)^N}$$

Ou seja, é o tipo do sistema que determina as características em baixas frequências.

- Para as altas frequências, isto é $\omega \gg \max(T_1^{-1}, \dots, T_a^{-1}, \dots)$ tem-se que:

$$F(j\omega) \simeq \frac{K_a}{(j\omega)^{n-m}}$$

- Se $n > m$, o módulo sempre vai tender à origem, mas $\angle F(j\omega) \simeq -(n-m)\angle(j\omega)$.

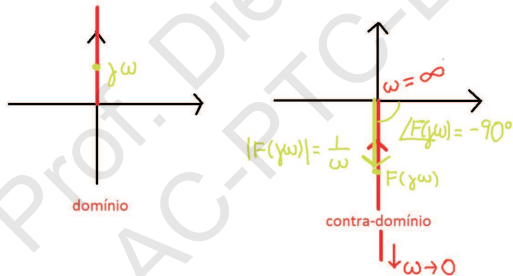
Gráficos de Nyquist 4

- O formato nas médias frequências vai depender da posição relativa de pólos e zeros.

Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Como $\angle F(j\omega) = -90$ graus e $|F(j\omega)| = 1/|\omega|$:



Gráficos de Nyquist 5

Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

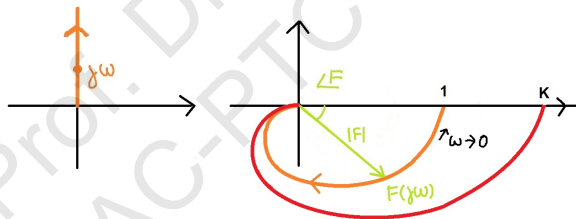
Para $\omega = 0$ temos $F(j0) = 1$. Para $\omega \rightarrow \infty$ vemos que o gráfico termina na origem. $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T)$, vemos que a fase varia de 0 a -90 graus. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$, de modo que ele começa em 1 e vai decrescendo até 0.



Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

Como $\angle F(j\omega) = -\angle(1 + j\omega T_1) - \angle(1 + j\omega T_2)$, a fase começa em 0 graus e deve terminar em -180 graus. O módulo começa em 1 para $\omega = 0$ e termina em 0 para $\omega \rightarrow \infty$. Se multiplicar por $K > 0$, o novo gráfico de Nyquist fica como a curva em vermelho. A fase nunca é alterada, pois $\angle K = 0$.



Exemplo:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)}$$

tem-se que $\angle F(j\omega) = -\angle(j\omega) - \angle(1 + j\omega T) = -90 - \angle(1 + j\omega T)$. O módulo é dado por $|F(j\omega)| = 1/\omega\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$, de modo que para $\omega = 0$, tem-se que a fase é -90 graus e o módulo é ∞ .

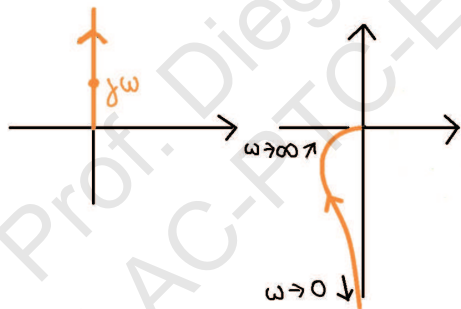
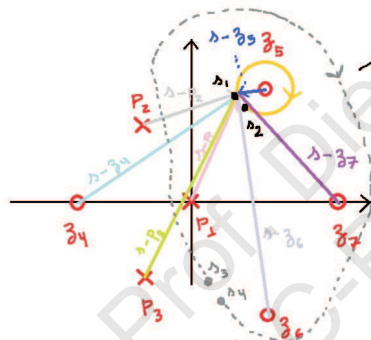


Figura: Diagrama de Nyquist de dois Pólos Reais

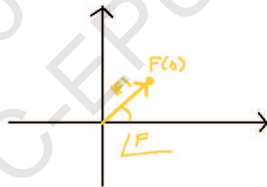
Princípio do Argumento 1

Consideremos a função de transferência:

$$F(s) = \frac{(s - z_4)(s - z_5)(s - z_6)(s - z_7)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$



$F(s)$



$$\angle F = \angle \lambda - z_4 + \angle \lambda - z_5 + \angle \lambda - z_6 + \angle \lambda - z_7 \\ - \angle \lambda - p_1 - \angle \lambda - p_2 - \angle \lambda - p_3$$

$$\angle F(\lambda_2) - \angle F(\lambda_1) = -360^\circ$$

$$\angle F(\lambda_4) - \angle F(\lambda_2) = -3 \cdot 360^\circ + 360^\circ = -720^\circ$$

Princípio do Argumento 2

- Se s percorre curva fechada em torno de z_5 , partindo do ponto s_1 e terminando em $s_2 \simeq s_1$, todos os vetores terminam no mesmo ângulo que começaram, exceto $(s - z_5)$, que dá uma volta completa de 360 graus no sentido horário, e $\angle F(s_2) - \angle F(s_1) = -360$ graus;
- Se s percorre a circunferência cinza pontilhada, o deslocamento angular é:

$$\angle F(s_4) - \angle F(s_3) = -3 \times 360^\circ + 360^\circ = -720^\circ \quad (2)$$

o que corresponde a duas voltas no sentido horário. Note que no interior desta curva temos um polo e três zeros.

- Se a curva cinza fosse deformada para incluir p_2 , o vetor $(s - p_2)$ daria também uma volta completa, e o resultado seria -360 graus.

Princípio (do Argumento)

Supondo que a curva fechada no domínio está orientada no sentido horário, o número de voltas no sentido horário que $F(s)$ dá em torno da origem é igual ao número de zeros de $F(s)$ menos o número de pólos de $F(s)$ no interior da curva.

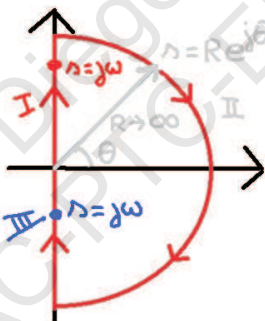
Estabilidade de um sistema em malha fechada: contar pólos de malha fechada (zeros da função $F(s) = 1 + G(s)K(s)$) no semiplano direito. Os polos de $F(s)$ são os pólos de MA.

Corolários

Supondo uma curva fechada no domínio de $F(s)$ que está orientada no sentido horário, o número de voltas que $F(s) = 1 + G(s)K(s)$ dá em torno da origem no sentido horário é igual ao número de pólos de malha fechada menos o número de pólos de malha aberta no interior da curva.

Contorno de Nyquist

É necessário então um contorno que envolva o semiplano direito para se poder usar o princípio do argumento. Este contorno é uma curva fechada que contém o eixo imaginário inteiro (no limite para $R \rightarrow \infty$, e ainda contém uma semi-circunferência de raio $R \rightarrow \infty$).



Podemos então reescrever o princípio do argumento da seguinte forma:

Corolários

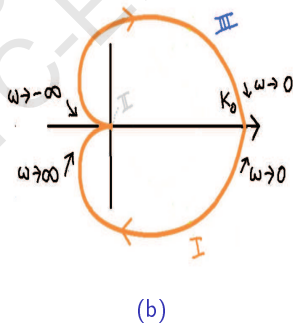
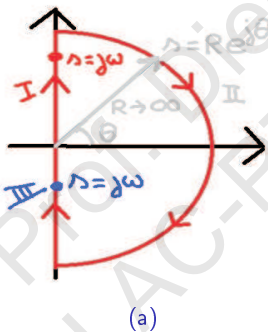
Supondo o contorno de Nyquist, o número de voltas que $G(s)K(s)$ dá em torno de -1 no sentido horário (ou seja, N) é igual ao número de pólos de malha fechada no SPD (ou seja, Z) menos o número de pólos de malha aberta no SPD (ou seja, P). Isso pode ser escrito como:

$$Z = N + P$$

Critério de Estabilidade de Nyquist 2

Para o caso da função

$$G(s)(Ks) = \frac{K_0}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, \text{ com } K_0, T_1, T_2 > 0 \quad (3)$$



Critério de Estabilidade de Nyquist 3

- A primeira parte corresponde à curva I, que é o semi-eixo imaginário positivo. Este diagrama já foi traçado anteriormente.
- A segunda parte do esboço corresponde à região II, que é a semi-circunferência de raio infinito, representada por $s = Re^{j\theta}$.

$$G(Re^{j\theta})K(Re^{j\theta}) = \frac{K_0}{(1 + T_1 Re^{j\theta})(1 + T_2 Re^{j\theta})} \quad (4)$$

- Para $R \rightarrow \infty$, tem-se que $G(Re^{j\theta})K(Re^{j\theta}) = 0$, ou seja, para toda a semi-circunferência de raio infinito, o gráfico de Nyquist permanece na origem.
- Para o caso da região III, como s está no semi-eixo negativo, devido à propriedade que $G(-j\omega)K(-j\omega) = G^*(j\omega)K^*(j\omega)$, então o gráfico de Nyquist é o complexo conjugado do caso da região I, ou seja, simplesmente troca-se o sinal da parte imaginária.

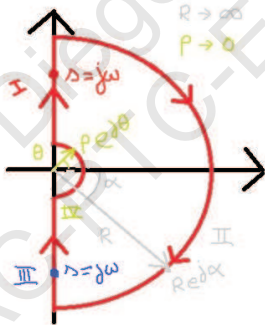
- Nota-se que o ponto -1 não é envolvido nenhuma vez, de modo que $N = 0$.
- Não existe nenhum pólo de malha aberta no semi-plano direito, o que significa que $P = 0$.
- Pelo critério de estabilidade de Nyquist, tem-se que $Z = P + N = 0$, ou seja, o sistema em malha fechada é estável para quaisquer valores de $K_0, T_1, T_2 > 0$.

Critério de Estabilidade de Nyquist 5

Para o caso da função de transferência:

$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(1+sT)}, \text{ com } K_0, T > 0 \quad (5)$$

o problema deve sofrer uma modificação, pois o contorno de Nyquist passa exatamente em cima do pólo que está na origem.



- Nota-se agora que há duas semi-circunferências: uma com raio tende para o infinito $R \rightarrow \infty$ e outra cujo raio tende a zero $\rho \rightarrow 0^+$.
- A região I já foi obtida anteriormente para esta função de transferência
- Para a região II, ocorre o mesmo que no problema anterior, ou seja, o gráfico de Nyquist permanece parado na origem enquanto o ponto s percorre a circunferência de raio infinito.
- Para a região III, devido à simetria par do módulo e ímpar da fase, o gráfico é a imagem espelhada em relação ao eixo real.

Critério de Estabilidade de Nyquist 7

- Para o caso da região IV, temos $s = \rho e^{j\theta}$. Então:

$$G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) = \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}(1 + T_2 \rho e^{j\theta})} \quad (6)$$

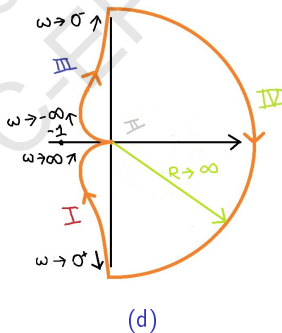
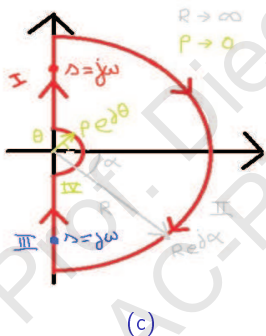
- Se $\rho \rightarrow 0$, o termo $1 + T_2 \rho e^{j\theta}$ fica aproximadamente igual a 1. Deste modo, tem-se que:

$$G(\rho e^{j\theta})KH(\rho e^{j\theta}) \approx \frac{K_0}{\rho e^{j\theta}} = \frac{K_0}{\rho} e^{-j\theta}$$

- A fase deste número complexo é $-\theta$ varia de -90 a 90 graus no sentido anti-horário (ponteiro amarelo). Deste modo, $G(\rho e^{j\theta})K(\rho e^{j\theta}) \approx (K_0/\rho)e^{-j\theta}$, que descreve uma semi-circunferência, porém com raio muito grande, e no sentido horário.
- Esta semi-circunferência deve começar no ponto final do trecho III e terminar no ponto inicial do trecho I, preservando o sentido.

Critério de Estabilidade de Nyquist 8

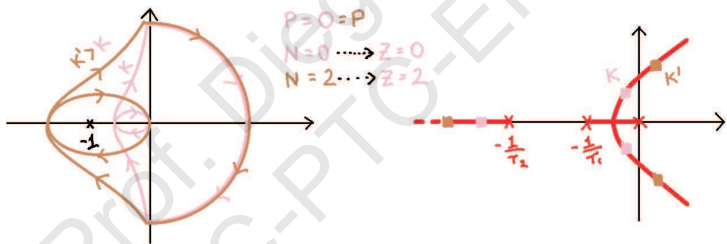
Aplicando o critério de estabilidade de Nyquist, temos que $N = 0$ e $P = 0$, de modo que $Z = 0$, ou seja, o sistema é estável em malha fechada para qualquer $K_0 > 0$.



Critério de Estabilidade de Nyquist 9

Para o caso da função de transferência em malha aberta da forma:

$$G(s)K(s) = \frac{K_0}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

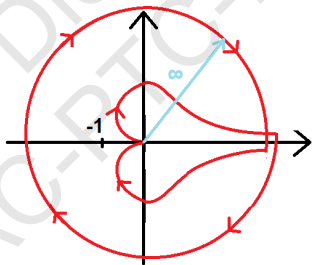


Critério de Estabilidade de Nyquist 10

A FT de malha aberta:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s-1)}{s^2(s+2)}$$

que é de fase não-mínima, pois tem um zero no semiplano direito. Qualquer que seja o valor de K , o sistema em malha fechada será instável. De fato, tem-se que $P = 0$, $N = 1$, logo $Z = P + N = 1$.



Critério de Estabilidade de Nyquist 11

A FT de malha aberta:

$$G(s)K(s) = \frac{K(s+3)}{(s+2)(s-2)}$$

que é uma função de transferência instável. Nota-se que um valor pequeno o suficiente de K fará com que o sistema em malha fechada seja estável. De fato, $P = 1$ e só teremos estabilidade quando $N = 0$ (na figura, tem-se que $N = -1$).

