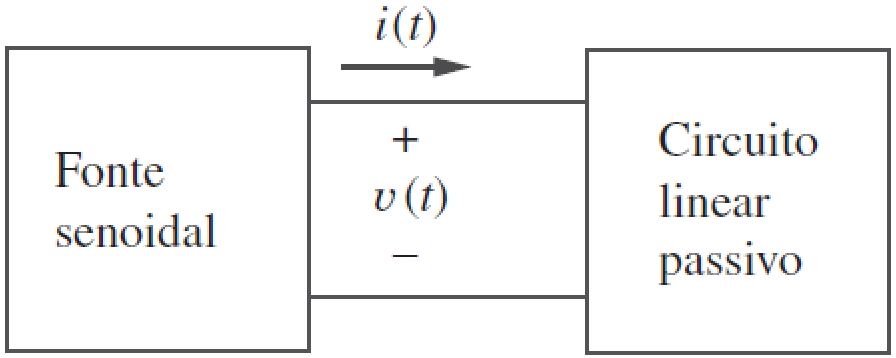
LOM3202 – CIRCUITOS ELÉTRICOS
AULA 12

Prof. Dr. Emerson G. Melo

Sumário

- Potência Instantânea e Média;
- Valor RMS ou Eficaz;
- Potência Complexa;
- Fator de Potência;
- Correção do Fator de Potência.

Potência Instantânea



$$\boxed{p(t) = v(t)i(t)}$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)\, I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

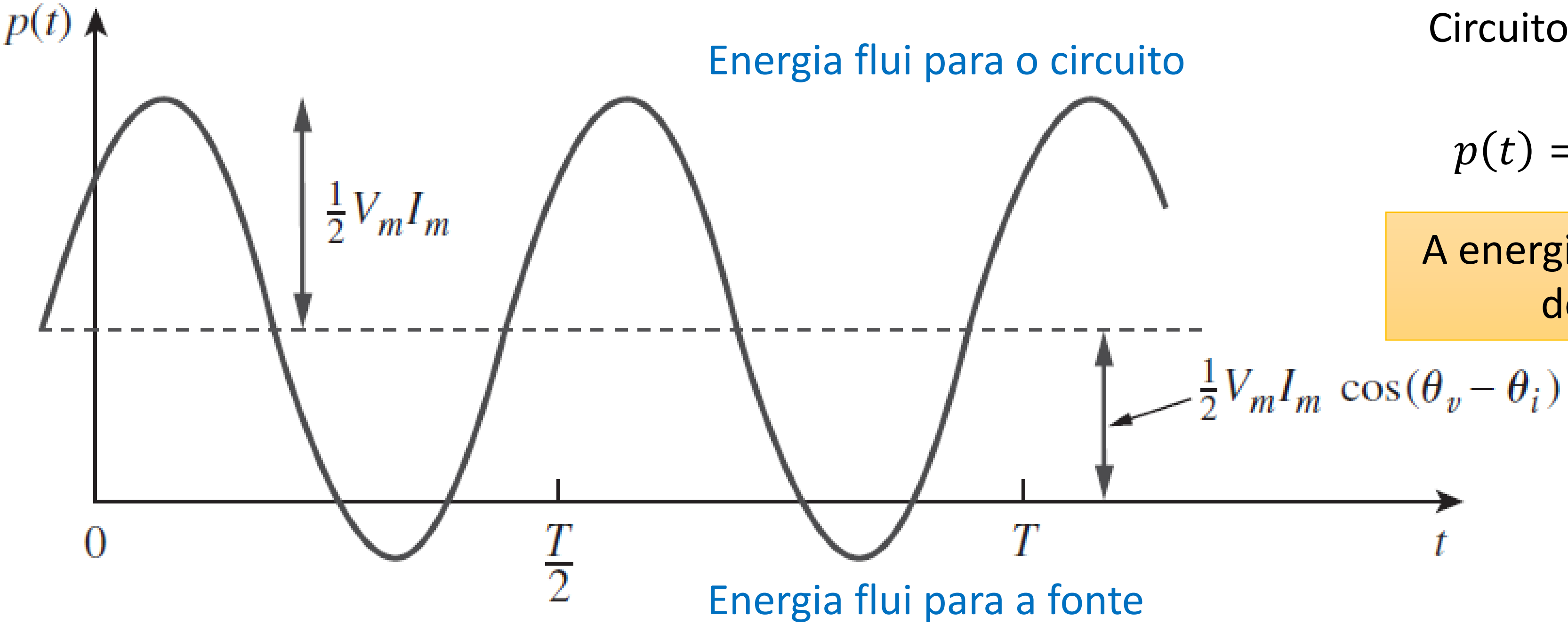
$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \omega t - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v + \omega t + \theta_i)$$

$$\boxed{p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}_{\text{variável}}}$$

2x a frequência da tensão ou corrente

Potência Instantânea

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}_{\text{variável}}$$



Circuito Resistivo $\boxed{\theta_v = \theta_i}$

$$p(t) = \frac{1}{2}V_m I_m + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

A energia é sempre absorvida pelo circuito

Circuito Puramente Reativo $\boxed{\theta_v - \theta_i = 90°}$

$$p(t) = 0 + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

A energia é transferida da fonte para o circuito e do circuito para a fonte sem perdas

Potência Média

Potência Média

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right] dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)\, dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\, dt$$

$$P = \underbrace{\frac{1}{2T}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)\int_0^T dt}\, + \underbrace{\frac{1}{2T}V_m I_m \int_0^T \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\, dt}$$

$$P = \frac{1}{2T}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)\, T$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

Potência Média

$$\frac{1}{4\omega T}V_m I_m[\text{sen}(2\omega T + \theta_v + \theta_i) - \text{sen}(\theta_v + \theta_i)]$$

$$\frac{1}{4\omega T}V_m I_m\left[\text{sen}\left(2\omega\frac{2\pi}{\omega} + \theta_v + \theta_i\right) - \text{sen}(\theta_v + \theta_i)\right]$$

$$\text{sen}(4\pi + \theta_v + \theta_i) = \text{sen}(\theta_v + \theta_i)$$

$$\frac{1}{4\omega T}V_m I_m[\text{sen}(\theta_v + \theta_i) - \text{sen}(\theta_v + \theta_i)] = 0$$

Potência Média

Potência Média

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Forma Fasorial

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \angle \theta_v - \theta_i$$

$$P = \frac{1}{2} Re[\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*]$$

Circuito Resistivo $\theta_v = \theta_i$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m$$

Circuito Puramente Reativo $\theta_v - \theta_i = 90°$

$$P = 0$$

Um circuito puramente reativo não absorve potência média

Potência Instantânea e Média

- Calcular a potência instantânea e a potência média para um circuito, dados:

$$v(t) = 120\cos(377t + 45°)\ V \qquad i(t) = 10\cos(377t - 10°)\ A$$

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}$$

$$p(t) = \frac{1}{2}120 \times 10 \times \cos(45° + 10°) + \frac{1}{2}120 \times 10 \times \cos(754t + 45° - 10°)$$

$$p(t) = 344{,}2 + 600\cos(754t + 35°)\ W$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

$$P = \frac{1}{2}120 \times 10 \times \cos(45° + 10°) \qquad P = 600\cos(55°) \qquad P = 344{,}2\ W$$

Potência Instantânea e Média

- Calcular a potência média absorvida por uma impedância $\boldsymbol{Z} = 30 - j70\ \Omega$ quando é aplicada uma tensão $\boldsymbol{V} = 120\angle 0°$.

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{120\angle 0°}{30 - j70} = \frac{120\angle 0°}{76{,}16\angle -66{,}8°} = 1{,}576\angle 66{,}8°$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}$$

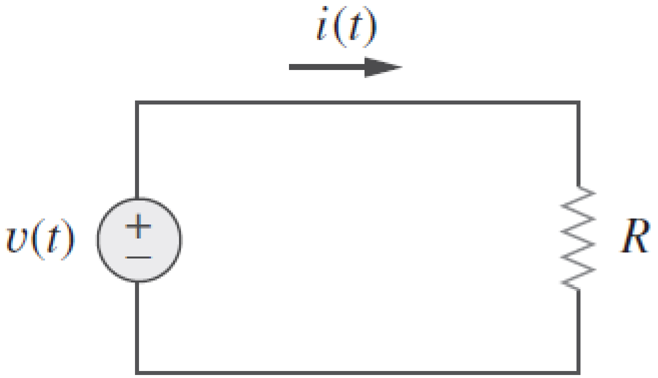
$$P = \frac{1}{2} 120 \times 1{,}576 \times \cos(0° - 66{,}8°)$$

$$P = 37{,}24\ W$$

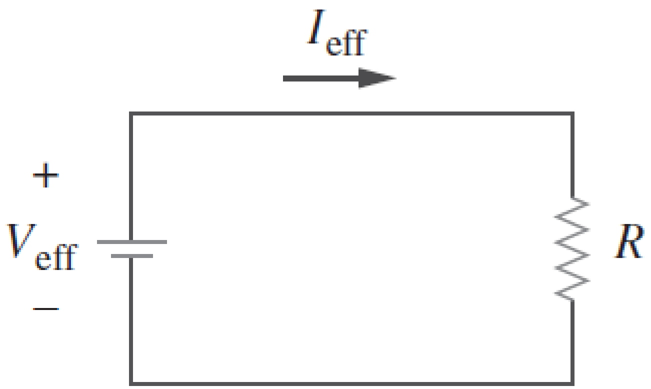
Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Valor RMS ou Eficaz

- O Valor RMS (root-mean-square) ou Eficaz de uma corrente periódica corresponde ao valor de corrente CC que capaz é de produzir a mesma potência média que a corrente periódica.



$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 R\, dt$$



$$P = {I_{ef}}^2 R$$

$$\frac{R}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt = {I_{ef}}^2 R \qquad \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt = {I_{ef}}^2$$

Corrente Eficaz

$$I_{ef} = I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\, dt}$$

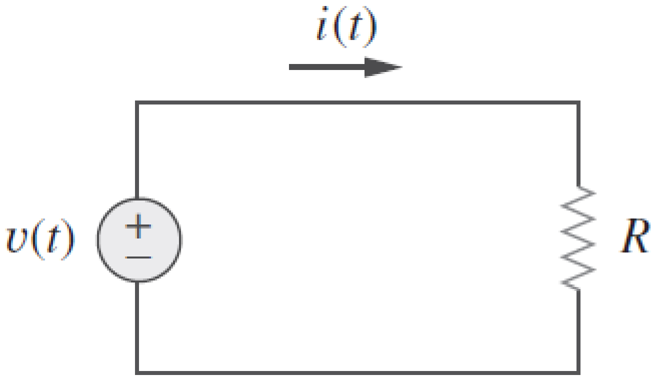
Tensão Eficaz

$$V_{ef} = V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)^2\, dt}$$

Raiz do valor médio quadrático (root-mean-square)

Valor RMS ou Eficaz

- O Valor RMS (root-mean-square) ou Eficaz de uma corrente periódica corresponde ao valor de corrente CC que capaz de produzir a mesma potência média que a corrente periódica.



$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

Forma de Onda Senoidal

Corrente Eficaz

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T {I_m}^2\cos^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{{I_m}^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t)]\,dt}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{{I_m}^2}{T}\left[\frac{T}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T)\right]} = \sqrt{\frac{{I_m}^2}{T}\left[\frac{T}{2}+\frac{1}{2\omega}\sin\left(2\omega\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]} = \sqrt{\frac{{I_m}^2}{2}}$$

Corrente Eficaz

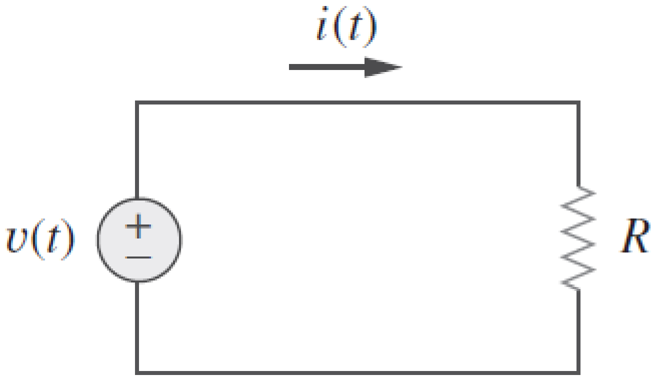
$$\boxed{I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Tensão Eficaz

$$\boxed{V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

Valor RMS ou Eficaz

- O Valor RMS (root-mean-square) ou Eficaz de uma corrente periódica corresponde ao valor de corrente CC que capaz de produzir a mesma potência média que a corrente periódica.



$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

Forma de Onda Senoidal

Corrente Eficaz

$$I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Tensão Eficaz

$$V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i) = I_{RMS} V_{RMS} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$P = I_{RMS} V_{RMS} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

A Potência Média pode ser calculada em função dos valores eficazes de tensão e corrente

Potência Complexa

- A Potência Complexa (**S**) é a soma vetorial entre a Potência Real ou Ativa (P) e a Potência Reativa (Q).

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{V}_{RMS}\boldsymbol{I}_{RMS}{}^* = V_{RMS}I_{RMS}\angle\theta_v - \theta_i = \underbrace{V_{RMS}I_{RMS}\cos(\theta_v - \theta_i)}_{P = Re\{\boldsymbol{S}\}} + \underbrace{jV_{RMS}I_{RMS}\,\mathrm{sen}(\theta_v - \theta_i)}_{Q = Im\{\boldsymbol{S}\}} = P + jQ$$

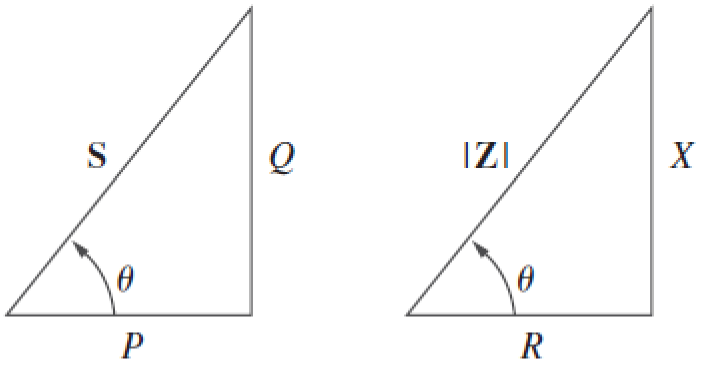
$$\boldsymbol{S} = I_{RMS}{}^2\boldsymbol{Z} = I_{RMS}{}^2(R + jX) = P + jQ$$

Potência Complexa	$\boldsymbol{S} = P + jQ = \boldsymbol{V}_{RMS}\boldsymbol{I}_{RMS}{}^* = V_{RMS}I_{RMS}\angle\theta_v - \theta_i$	VA
Potência Aparente	$S = \lvert\boldsymbol{S}\rvert = \lvert\boldsymbol{V}_{RMS}\rvert\lvert\boldsymbol{I}_{RMS}\rvert = V_{RMS}I_{RMS} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	VA
Potência Ativa	$P = Re\{\boldsymbol{S}\} = S\cos(\theta_v - \theta_i)$	W
Potência Reativa	$Q = Im\{\boldsymbol{S}\} = S\,\mathrm{sen}(\theta_v - \theta_i)$	VAR

Fator de Potência

- O Fator de Potência (FP) é o cosseno do ângulo entre a Potência Ativa e a Potência Aparente.

$$P = Re\{\boldsymbol{S}\} = S\cos(\theta_v - \theta_i) = S\cos(\theta)$$



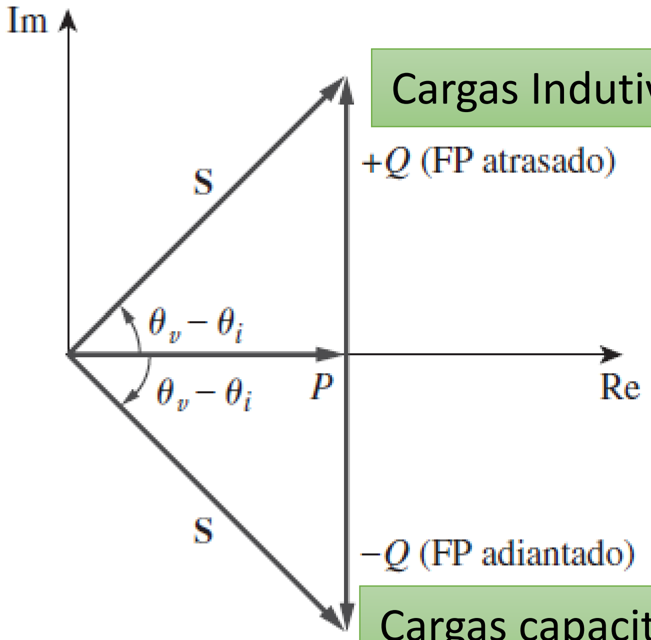
$$\theta = \theta_v - \theta_i$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \frac{V_{RMS}}{I_{RMS}}\angle\theta_v - \theta_i$$

A diferença de fase entre tensão e corrente é igual a fase da impedância

Fator de Potência

$$FP = \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{P}{S}$$



Cargas Indutivas

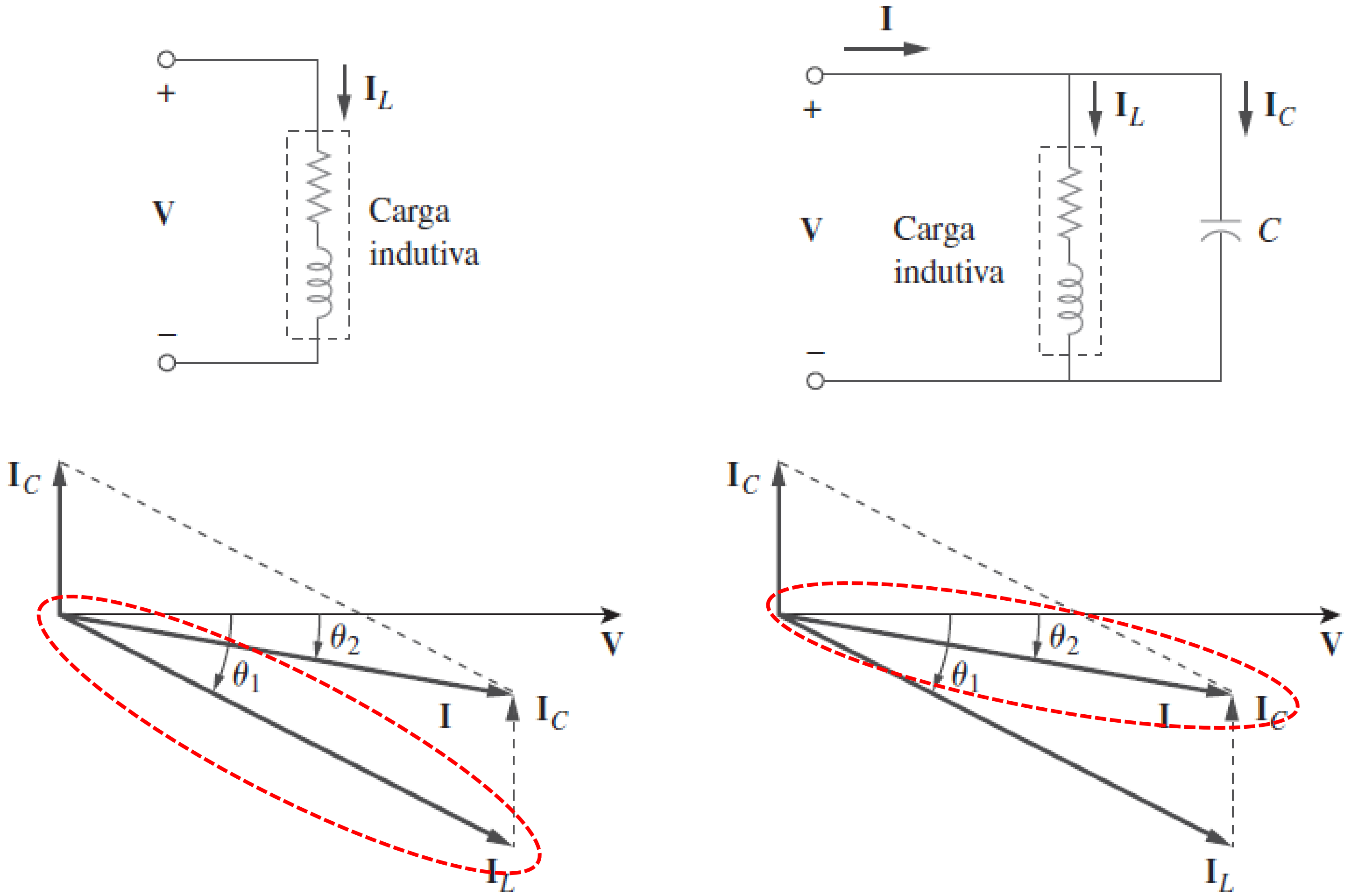
Q = 0
Cargas Resistivas
FP unitário

Cargas capacitivas

Correção do Fator de Potência

- Processo em que o fator de potência é aumentado mantendo-se a potência ativa constante.

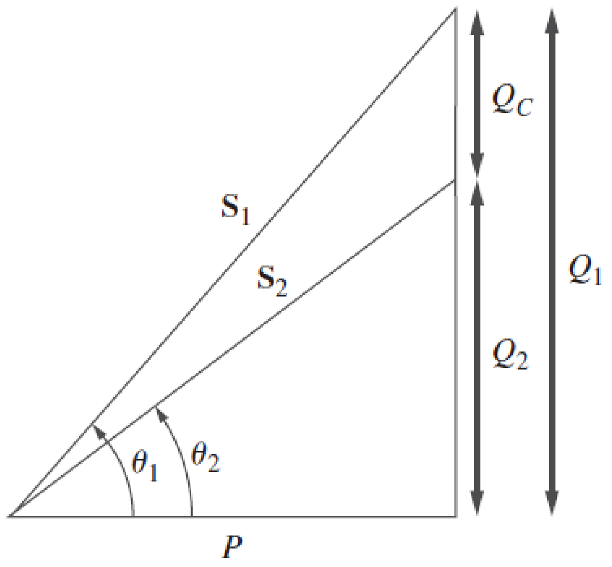
- Valores baixos de FP resultam em maior circulação de corrente nas redes de distribuição de energia;
- Os cabos elétricos são dimensionados pela corrente;
- A concessionária cobra por essa demanda, mesmo que parte dessa corrente não esteja gerando trabalho;
- Quanto mais próximo o FP fica da unidade, mais racional se torna todo o sistema.



Correção do Fator de Potência

Calculo do capacitor ou indutor *shunt* para correção do fator de potência.

Diminuir o ângulo de fase de θ_1 para θ_2



Quanto menor a Potência Reativa (Q), menor o valor de FP

$$P = S_1\cos(\theta_1) = \frac{Q_1}{\mathrm{sen}(\theta_1)}\cos(\theta_1)$$

$$Q_1 = S_1\,\mathrm{sen}(\theta_1) = P\,\mathrm{t}g(\theta_1)$$

Mantendo P constante:

$$Q_2 = P\,\mathrm{t}g(\theta_2)$$

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P[\mathrm{t}g(\theta_1) - \mathrm{t}g(\theta_2)]$$

$$Q_C = \frac{{V_{RMS}}^2}{X_C} = \omega C {V_{RMS}}^2$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega {V_{RMS}}^2} = \frac{P[\mathrm{t}g(\theta_1) - \mathrm{t}g(\theta_2)]}{\omega {V_{RMS}}^2}$$

$$L = \frac{{V_{RMS}}^2}{\omega Q_L} = \frac{{V_{RMS}}^2}{\omega P[\mathrm{t}g(\theta_1) - \mathrm{t}g(\theta_2)]}$$

Correção do Fator de Potência

- Quando conectada a uma rede elétrica de 120 V(RMS), 60 Hz, uma carga absorve 4 kW com um fator de potência atrasado de 0,8. Determine o valor da capacitância necessária para elevar o FP para 0,95.

$$C = \frac{Q_C}{\omega {V_{RMS}}^2} = \frac{P[\text{tg}(\theta_1) - \text{tg}(\theta_2)]}{\omega {V_{RMS}}^2}$$

$$FP = \cos(\theta_1) = 0{,}8$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} 0{,}8 = 36{,}87°$$

$$P = S_1 \cos(\theta_1)$$

$$S_1 = \frac{P}{\cos(\theta_1)} = \frac{4000}{0{,}8} = 5000\, VA$$

$$Q_1 = S_1\, \text{sen}(\theta_1) = 5000\, \text{sen}(36{,}87°) = 3000\, VAR$$

$$\cos(\theta_2) = 0{,}95$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} 0{,}95 = 18{,}19°$$

$$P = S_2 \cos(\theta_2)$$

$$S_2 = \frac{P}{\cos(\theta_2)} = \frac{4000}{0{,}95} = 4210{,}5\, VA$$

$$Q_2 = S_2\, \text{sen}(\theta_2) = 4210{,}5\, \text{sen}(18{,}19°) = 1314{,}4\, VAR$$

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314{,}4 = 1685{,}6\, VAR$$

$$C = \frac{Q_C}{\omega {V_{RMS}}^2} = \frac{1685{,}6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310{,}5\, \mu F$$

Exercícios Propostos

- 1 – Calcular a potência instantânea e a potência média absorvida por um circuito linear passivo quando:

$$v(t) = 330\cos(10t + 20°)\ V \qquad i(t) = 33\,\mathrm{sen}(10t + 60°)\ A$$

- Respostas:

$$p(t) = 3{,}5 + 5{,}445\cos(20t - 10°)\ kW$$

$$P = 3{,}5\ kW$$

Exercícios Propostos

- 2 – Calcular o fator de potência, a potência aparente e a potência complexa de uma carga cuja impedância é $\boldsymbol{Z} = 60 - j40\ \Omega$, quando é aplicada uma tensão $v(t) = 320\cos(377t + 100°)\ V$.

- Respostas:

$FP = 0{,}8321$ atrasado (Q > 0)

$S = 710\ VA$

$\boldsymbol{S} = 710\angle 33{,}69°\ VA$

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Exercícios Propostos

- 3 – Para uma carga, $\boldsymbol{V}_{RMS} = 110\angle 85°\ V$, $\boldsymbol{I}_{RMS} = 0{,}4\angle 15°\ A$. Determine: (a) as potências complexa e aparente; (b) as potências ativa e reativa; (c) o fator de potência e a impedância da carga.

- Respostas:

$\boldsymbol{S} = 44\angle 70°\ VA$ $\qquad$ $S = 44\ VA$

$P = 15{,}05\ W$ $\qquad$ $Q = 41{,}35\ VAR$

$FP = 0{,}342$ atrasado (Q > 0) $\qquad$ $\boldsymbol{Z} = 94{,}06 + j258{,}4\ \Omega$

Exercícios Propostos

- 4 – Determinar o valor da capacitância em paralelo necessária para corrigir uma carga de 140 kVAR com FP de 0,85 (atrasado) para um FP unitário. A carga é alimentada por uma linha de 110 V(RMS), 60 Hz.

- Respostas:

$$C = 30{,}69\ mF$$

Referências Bibliográficas

- J. W. Nilsson, e S. A. Riedel, "Electric Circuits", 9 ed., New York, Prentice Hall (2011).
- W. H. Hyat, J. E. Kemmerly, e S. M Durbin, "Análise de Circuitos em Engenharia", 7 ed., São Paulo, McGraw-Hill (2008).
- C. K. Alexander, e M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de Circuitos Elétricos", 5 ed., Porto Alegre, AMGH (2013).
- M. N. O. Sadiku, "Elementos de Eletromagnetismo", 3 ed., Porto Alegre, Bookman (2004).