MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 12 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

(1) Varifique que a função de distribuição

$$W_2(x) = 1 - \exp[-(-x)^{-\alpha}]$$

para $x \leq 0$ e $\alpha > 0$ é estável através do mínimo. Verifique que os α_k correspondentes são maiores do que 1 para $k > 1$.

Solução:
Considere $\beta_k = 0$.

$$\overline{F}^k(\alpha_k x) = \overline{F}(x) \Leftrightarrow \exp[-k(-\alpha_k x)^{-\alpha}] = \exp[-(-x)^{-\alpha}].$$

Para $x = -1$ temos

$$exp[-k(\alpha_k)^{-\alpha}] = e^{-1} \Leftrightarrow k(\alpha_k)^{-\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\alpha_k^\alpha} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_k^\alpha = k \Leftrightarrow \alpha_k = k^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(2) Uma função de distribuição G é estável através do máximo, se para todo inteiro positivo k, existem constantes α_k e $\beta_k$tais que

$$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x), \quad \forall x \in R.$$

Prove que a função

$$W_2^*(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad se \quad x > 0, \quad \alpha > 0$$

é estável através do máximo.

Solução:

$$
(e^{-(\alpha_k x+\beta_k)^{-\alpha}})^k = e^{-x^{-\alpha}} \Leftrightarrow e^{-k(\alpha_k x+\beta_k)^{-\alpha}}) = e^{-x^{-\alpha}} \Leftrightarrow
$$

$$
k(\alpha_k x + \beta_k)^{-\alpha} = x^{-\alpha} \Leftrightarrow (k^{-\frac{1}{\alpha}}\alpha_k x + k^{-\frac{1}{\alpha}}\beta_k)^{-\alpha} = x^{-\alpha} \Leftrightarrow
$$

$$
k^{-\frac{1}{\alpha}}\alpha_k x + k^{-\frac{1}{\alpha}}\beta_k = x \leftrightarrow \alpha_k = k^{-\frac{1}{\alpha}} e \beta_k = 0.
$$

(3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$.

a) considere as sequências $a_n = \frac{1}{n\lambda}$ e $b_n = \frac{1}{\lambda}$. Qual o limite em distribuição de $\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n}$.

b) Dê um intervalo de confiança, ao nível de 0,9 de confiança para o parâmetro λ.

Solução:

$$
\overline{F}^n(a_n x + b) = [e^{-\lambda(a_n x+b_n)}]^n {=} e^{-\lambda(\frac{x}{n\lambda}+\frac{1}{\lambda})^n} {=}
$$

$$
e^{-(\frac{x}{n}+1)^n} \to e^{-e^x}, \quad n \to \infty, \quad -\infty < x < \infty.
$$

O limite superior para a distribuição padronizada é a solução da equação:

$$
1 - e^{-e^x} = 0,95 \Leftrightarrow e^{-e^x} = 0,05 \Leftrightarrow e^{-x} = \ln(0,05) =
$$

$$-3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3) = 1,09.$$

O limite inferior para a distribuição padronizada é a solução da equação:

$$1 - e^{-e^x} = 0,05 \Leftrightarrow e^{-e^x} = 0,95 \Leftrightarrow e^{-x} = \ln(0,95) =$$

$$-0,05 \Leftrightarrow e^x = 0,05 \Leftrightarrow x = \ln(0,05) = -3.$$

Portanto

$$P(-3 \leq \frac{X_{(n;1)} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{n\lambda}} \leq 1,09) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(-3 \leq n\lambda X_{(n;1)} - n \leq 1,09) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-3+n}{nX_{(n;1)}} \leq \lambda \leq \frac{1,09+n}{nX_{(n;1)}}) = 0,9.$$

Concluimos que o intervalo de confiança é:

$$(\frac{-3+n}{nx_{(n;1)}}; \frac{1,09+n}{nx_{(n;1)}})$$