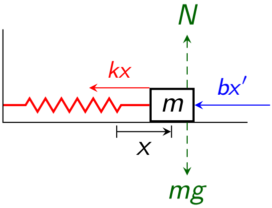
SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula EDO-1 – Autovalores e autovetores

Prof. Miguel Frasson

Novembro de 2020

2ª Lei de Newton



- Modelagem:
  - 2ª lei de Newton: força resultante = massa × aceleração
  - A força peso cancela-se com a força normal
  - Força de restituição da mola: $-ky$
  - Resistência do meio (proporcional à velocidade): $-bv = -by'$
- Resultante: $R = -ky - by'$

$$my'' = R \implies my'' + by' + ky = 0$$

Velocidade de reação química

- Modelo = *Lei da ação das massas*:
  a taxa de variação da concentração dos reagentes é proporcional à concentração de cada uma dessas substâncias.
- Exemplo de reação: $A + B \to C$
- Inicialmente: temos a, b, 0 mols de A, B e C, respectivamente.
- Quantidade do produto C: $y(t)$
- Quantidade de A: $a - y(t)$
- Quantidade de B: $b - y(t)$

$$y' = k(a - y)(b - y)$$

Lei de Malthus

Modelo de crescimento populacional

- modelagem: taxa de crescimento é proporcional ao número de indivíduos.
- População: $y(t)$
- Taxa de crescimento: $y'(t) = ky(t)$

Modelo de Velhust (1838)

Modelo de crescimento populacional

- Modelagem: taxa de crescimento é proporcional ao número de indivíduos, mas espaço é limitado.
- População: $y(t)$
- Limite de indivíduos: N
- Taxa de crescimento:

$$y' = ky(N - y) = kNy - ky^2$$

O que é EDO

- Uma equação diferencial é uma equação que relaciona uma função incógnita e algumas de suas derivadas
- Exemplos
  - Lei de Malthus: $y' = ky$
  - 2ª lei de Newton: $mx'' + bx' + cx = f(t)$
  - Equação do calor: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- Se há apenas derivadas usuais (não parciais), a equação diferencial chama-se ordinária $\rightarrow$ EDO
- É útil omitir a notação (t).

$$y'(t) = ay(t) + e^t(y(t))^2 \quad \rightarrow \quad y' = ay + e^t y^2$$

Soluções

Considere uma EDO

$$y' = f(t, y) \tag{EDO}$$

- Uma solução é uma função $y(t)$ definida num intervalo I que satisfaz (EDO) para todo $t \in I$

$y' + y = 1$ tem soluções:

- $y(t) = 1$
- $y(t) = 1 - e^{-t}$
- $y(t) = 1 + 2e^{-t}$

Problema de Valor Inicial

- Um Problema da valor inicial (PVI) é uma EDO como

$$y' = f(t, y) \tag{EDO}$$

  junto com uma condição inicial $y(t_0) = y_0$
- As condições iniciais costumam impôr existência e unicidade de soluções, sob certas condições
- Veremos o Teorema de Existência e Unicidade para alguns tipos de EDOs

$y' + y = 1, \quad y(0) = a$ tem apenas a solução

- $y(t) = 1 + (a - 1)e^{-t}$

Classificação das EDOS

Ordem

- Ordem: é a ordem da maior derivada que aparece
- Exemplos:
  - Vel. reação química: $y' = k(a-y)(b-y) \to 1^{\underline{a}}$ ordem
  - Lei de Verhulst: $y' = kNy - ky^2 \to 1^{\underline{a}}$ ordem
  - $2^{\underline{a}}$ lei de Newton: $mx'' + bx' + cx = f(t) \to 2^{\underline{a}}$ ordem

- Uma EDO é linear se pode ser escrita na forma

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$$

- Exemplos:
  - Vel. reação química: $y' = k(a - y)(b - y) \to$ não linear
  - Lei de Malthus: $y' = ky \to$ linear
  - Lei de Verhulst: $y' = kNy - ky^2 \to$ não linear
  - 2ª lei de Newton: $mx'' + bx' + cx = f(t) \to$ linear
- Equações lineares têm mais estrutura para buscarmos soluções
- Se $f(t) = 0$, a EDO é linear homogênea

EDOs estudadas nesse curso

- EDOs de 1ª ordem (cap 2)
  - separáveis
  - lineares
- EDOs de 2ª ordem lineares (cap 4)
- Sistemas de EDOs (cap6, se houver tempo)

Exemplo do colegial: Movimento Uniformemente Variado

$=$ aceleração constante

Hipóteses

- posição: $x(t)$
- velocidade: $v(t) = x'(t)$
- aceleração: $a = v'(t) = x''(t)$
- hipóteses
  - $t_0 = 0$
  - $v(0) = v_0$
  - $x(0) = x_0$
  - aceleração a é constante

Equação da velocidade

Equação horária da velocidade

$$
\begin{aligned}
v'(t) = a &\implies \int_0^t v'(s)ds = \int_0^t a ds \\
&\implies v(t) - v(0) = a(t-0) \\
&\implies v(t) = v_0 + at
\end{aligned}
$$

- $x(0) = x_0$
- Da equação da velocidade $\overbrace{v(t)}^{x'} = v_0 + at$:

$$x'(t) = v_0 + at \implies \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t (v_0 + as)ds$$
$$\implies x(t) - x(0) = v_0(t-0) + a\left(\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{0^2}{2}\right)$$
$$\implies x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

- Se preferir a variável s para a posição:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Exemplo de modelagem: diluição de misturas

Diluição de misturas

Um tanque contém 5.000 litros de água na qual estão diluídos 50 Kg de sal. A essa mistura adiciona-se salmoura à razão de 10 l/min com uma concentração de sal de 20 g/l. A concentração da mistura é mantida homogênea por meio de um agitador. A mistura (homogênea) deixa o tanque à razão de 10 l/min. Determine a quantidade de sal em função do tempo.

Resolução

- $q(t)$: quantidade de sal no tanque no instante t.
- Note que o volume de água é constante em 5.000 l.
- Entrando: 10 l/min a 20 g/l $\Longrightarrow$ 200 g/min
- Saindo: 10 l/min à concentração $\frac{q(t)}{5000}$ g/l $\Longrightarrow$ $\frac{q}{500}$ g/min
- $\therefore\ q'(t) = 200 - \frac{q}{500}$

$$q' + \frac{1}{500}q = 200, \quad q(0) = 50000$$