2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 34 E 35

OBJETIVOS: DISCUTIR ÁLGEBRAS DE CONVOLUÇÃO

(CONT.) 4.3 SISTEMAS INVARIANTES POR TRANSLAÇÕES

NA AULA PASSADA, VIMOS QUE UM SISTEMA INVARIANTE POR TRANSLAÇÕES, EXPRESSO MATEMATICAMENTE POR UM OPERADOR INVARIANTE Ψ QUE CONVERTE UM ESTÍMULO E EM UMA RESPOSTA R,

$$\boxed{R = \Psi(E)},$$

ADMITE UMA EQUAÇÃO NO SENTIDO DE DISTRIBUIÇÕES, CONVOLUTIVA,

$$\boxed{R = G * E},$$

QUE, NO DOMÍNIO DE FOURIER,

TORNA-SE → **DISTRIBUIÇÕES**, EM GERAL!

$$\boxed{\tilde{R}(\omega) = \tilde{G}(\omega) . \tilde{E}(\omega)} .$$

POR CONVENIÊNCIA, MUDAREMOS TEMPORARIAMENTE NOSSAS CONVENÇÕES NA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA QUE $\boxed{\mathcal{F}[\delta(x)] = 1}$, POIS ASSIM A DELTA DE DIRAC TORNA-SE A IDENTIDADE DO PRODUTO DE CONVOLUÇÃO E G, A RESPOSTA IMPULSIVA: $\boxed{G = G * \delta}$.

A RELAÇÃO INVERSA $E = \Phi(R)$ CORRESPONDE A $\boxed{E = D * R}$ E $\boxed{G * D = \delta}$, DE MODO QUE G E D SÃO DISTRIBUIÇÕES MUTUAMENTE INVERSAS UMA DA OUTRA. MAS... FAZEMOS "CONTAS" COM ELAS? COM QUAIS REGRAS? UMA INVERSA SEMPRE EXISTE? SE SIM, É ÚNICA? ALÉM DISSO, COMO CONVERTEMOS

$R = \Psi(E)$ EM $R = G * E$? PRECISAMOS COMPLEMENTAR NOSSO ESTUDO DE DISTRIBUIÇÕES (E DE SUAS CONVOLUÇÕES, EM PARTICULAR) PARA ENTENDERMOS COMO PVIs SIMPLES

COMO

$$\boxed{\dot{x}(t) + \alpha . x(t) = 0 \quad , \quad x(0) = x_0}$$

E

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 . x(t) = 0 \quad , \quad x(0) = x_0 , \dot{x}(0) = v_0}$$

ADMITEM, COMO DISTRIBUIÇÕES, AS EQUAÇÕES

$$\boxed{(\delta' + \alpha\delta) * U = x_0 . \delta}$$

E

$$\boxed{(\delta'' + \omega_0^2 \delta) * U = x_0 \delta' + v_0 \delta} ,$$

RESPECTIVAMENTE. NOTE QUE AS CONDIÇÕES INICIAIS SÃO INCORPORADAS COMO "ESTÍMULOS" NAS EQS. EM DISTRIBUIÇÕES, MESMO COM EDOs HOMOGÊNEAS,

* PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO (DE DISTRIBUIÇÕES!)

JÁ VIMOS QUE O PRODUTO TENSORIAL VIABILIZA A CONVOLUÇÃO DE $S, T \in \mathcal{D}'$,

$$S * T = T * S$$
$$\Uparrow$$

$$\langle S * T, h \rangle \equiv \langle \overbrace{S \otimes T(x,y)}^{S(x).T(y)}, h(\underbrace{x+y}_{= y+x}) \rangle$$

SE UMA DAS PARCELAS TIVER SUPORTE LIMITADO OU SE AMBAS TIVEREM LIMITAÇÃO DE MESMA LATERALIDADE EM SEUS SUPORTES. <u>SE</u> <u>RESPEITADAS</u> ESSAS CONDIÇÕES PARA $R * S$, $S * T$ <u>E</u> $R * T$, A CONVOLUÇÃO É <u>ASSOCIATIVA</u>,

i $\boxed{R * (S * T) = (R * S) * T}$.

$$0 = (\underbrace{1 * \delta'}_{=0}) * H \neq 1 * (\underbrace{\delta' * H}_{=\delta}) = 1$$

POIS $1 * H$ <u>NÃO</u> <u>EXISTE</u>.

LEMBRE-SE DE QUE

$$\langle S(x)T(y), h(x+y)\rangle = \langle S(x), \langle T(y), h(x+y)\rangle\rangle .$$

ii $\boxed{\delta(x-a) * T(x) = T(x) * \delta(x-a) = T(x-a)}$

OU $\delta_a * T = T * \delta_a = T_a$,

$$\begin{aligned}\langle T_a, h\rangle &= \langle T(x-a), h(x)\rangle \\ &= \langle T(x), h(x+a)\rangle \\ &= \langle T, h_{-a}\rangle\end{aligned}$$

POIS

$$\langle T * \delta_a, h\rangle =$$

$$= \langle T(x), \langle \delta(y-a), h(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle T, h_{-a}\rangle = \langle T_a, h\rangle .$$

$a=0$

$\Downarrow$

$\boxed{\delta * T = T * \delta = T}$

iii $\boxed{\delta^{(m)} * T = T * \delta^{(m)} = T^{(m)}}$

$m>1$ SAI POR INDUÇÃO FINITA.

$$\begin{aligned}\langle T * \delta', h\rangle &= \langle T(x), \langle \delta'(y), h(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle T(x), \langle \delta(y), -\partial_y h(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle T(x), -h'(x)\rangle \\ &= \langle T'(x), h(x)\rangle = \langle T', h\rangle .\end{aligned}$$

CONVOLUIR COM δ' EQUIVALE A DIFERENCIAR UMA DISTRIBUIÇÃO!

ISSO JÁ É SUFICIENTE PARA ENTENDERMOS QUE UMA EDO LINEAR DE COEFICIENTES CONSTANTES (MAS SEM CONDIÇÕES INICIAIS OU DE CONTORNO!)

$$\boxed{\left[a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n}{dt^n}\right] X(t) = B(t)}$$

PODE SER EXPRESSA COMO O PRODUTO DE CONVOLUÇÃO

$$\boxed{\left[a_0 \delta + a_1 \delta' + \dots + a_n \delta^{(n)}\right] * X = B}.$$

iv $\boxed{(R*S)' = R'*S = R*S'}$,

POIS $\underline{R'*S} = (\delta'*R)*S = \delta'*(R*S) =$

$= \underline{(R*S)'} = (R*S)*\delta' = R*(S*\delta') = \underline{R*S'}$.

* ÁLGEBRA DE CONVOLUÇÃO

UMA ÁLGEBRA É UM ESPAÇO VETORIAL ADICIONALMENTE MUNIDO DE UM PRODUTO BILINEAR ENTRE SEUS VETORES.

UMA ÁLGEBRA DE CONVOLUÇÃO É UM ESPAÇO VETORIAL DE DISTRIBUIÇÕES CONTENDO A DELTA DE DIRAC δ E "FECHADO" EM QUALQUER QUANTIDADE DE PARCELAS ENVOLVIDAS NO PRODUTO DE CONVOLUÇÃO. TRATA-SE DE UMA ÁLGEBRA ASSOCIATIVA, COMUTATIVA E UNITAL (COM δ COMO IDENTIDADE). TEM IDENTIDADE

TEOREMA: EM UMA DADA ÁLGEBRA DE CONVOLUÇÃO, DADAS A E B E DESCONHECIDA X, A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $A * X = B$, SE EXISTIR, SERÁ ÚNICA, E DADA POR $X = A^{-1} * B$, ONDE $A * A^{-1} = A^{-1} * A = \delta$.

A INVERSA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DEPENDE DA ÁLGEBRA DE CONVOLUÇÃO CONSIDERADA.

$\mathcal{E}'$: ÁLGEBRA DAS DISTRIBUIÇÕES DE SUPORTE LIMITADO

$\mathcal{D}'_+$: " À ESQUERDA

$\mathcal{D}'_-$: " À DIREITA

◊ EXEMPLOS:

(i) $\dot{x}(t) + \alpha . x(t) = B(t)$, [redacted]

$$\rightarrow \underbrace{[\delta' + \alpha\delta]}_{\equiv D} * X = B$$

RESPOSTA ESTÍMULO

COM $G_+ * D = D * G_+ = \delta$,

$X = G_+ * B$. EM $\mathcal{D}'_+$, $G_+(t) = H(t)e^{-\alpha t}$.

POR QUÊ? DEPOIS!

VEJAMOS:

$$D * G_+ = (\delta' + \alpha\delta) * [H(t)e^{-\alpha t}] = \delta' * [H(t)e^{-\alpha t}] +$$

$$+ \alpha\delta * [H(t)e^{-\alpha t}] =$$

$$= [H(t)e^{-\alpha t}]' + \alpha[H(t)e^{-\alpha t}]$$

$$= H'(t)e^{-\alpha t} + (-\alpha)\cancel{H(t)}e^{-\alpha t} + \alpha \cancel{H(t)}e^{-\alpha t}$$

$$= \delta(t)e^{-\alpha t}$$

$$= \delta(t).e^{-\alpha .0} = \delta(t)$$

(ii) NOTE QUE, EM $\mathcal{D}'_-$, $G_-(t) = -H(-t)e^{-\alpha t}$

É O INVERSO DE D NO EXEMPLO ANTERIOR.

$$D * G_- = \dots = [-H(-t)e^{-\alpha t}]' + \alpha[-H(-t)e^{-\alpha t}] =$$

$$= \delta(-t)e^{-\alpha t} - H(-t)\cancel{(-\alpha)}e^{-\alpha t} - \alpha \cancel{H(-t)}e^{-\alpha t}$$

$$= \delta(t)$$

SE $\lambda \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, E $A, B \in \mathcal{D}'$,

- $\lambda(t)\,\delta(t-t_0) = \lambda(t_0)\,\delta(t-t_0)$
- $(\lambda(t).A)' = \lambda'(t)A + \lambda(t)A'$
- $(\lambda A) * B = A * (\lambda B) = \lambda(A * B)$.

(iii) $\ddot{x}(t) + w^2 . x(t) = B(t) \rightsquigarrow (\delta'' + w^2\delta) * X = B$

EM $\mathcal{D}'_+$, $G_+(t) = \dfrac{H(t)\sin(wt)}{w}$, POIS

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * G_+ = \left[\frac{H(t)\sin(\omega t)}{\omega}\right]'' +$$

$$+ \omega^2 \left[\frac{H(t)\sin(\omega t)}{\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\underbrace{H'(t)\sin(\omega t)}_{=\,\delta(t)\sin\omega t \,=\, 0} + H(t)\,\omega\cos(\omega t)\right]' + \omega H(t)\sin(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\omega}}\left[H(t)\,\cancel{\omega}\cos(\omega t)\right]' + \omega H(t)\sin(\omega t) =$$

$$= H'(t)\cos(\omega t) + \cancel{H(t)(-\omega)\sin(\omega t)} + \cancel{\omega H(t)\sin(\omega t)}$$

$$= \delta(t)\cos(\omega t)$$

$$= \delta(t)\cos 0 = \delta(t)$$

EM $\mathcal{D}'_-$, $G_-(t) = \dfrac{-H(-t)\sin(\omega t)}{\omega}$. ◇

* INCLUINDO CONDIÇÕES INICIAIS

EMBORA MUITAS VEZES SEJA CONVENIENTE ESCREVERMOS EXPRESSÕES COMO $\delta_a = \delta(t-a)$, DISTRIBUIÇÕES NÃO TÊM, EM SEU DOMÍNIO, "INSTANTES" t, MAS SIM FUNÇÕES (TESTE!) $h(t)$. COMO INCORPORAR CONDIÇÕES INICIAIS NA EQ. DISTRIBUCIONAL ORIUNDA DE UM PVI?

AGORA, A IDEIA É ESCREVER UMA EQUAÇÃO MODIFICADA EM DISTRIBUIÇÕES, PARA INCORPORAR AS CONDIÇÕES INICIAIS JÁ ESCOLHENDO UMA ÁLGEBRA DE CONVOLUÇÃO ESPECÍFICA. VEJAMOS EXEMPLOS TRABALHADOS.

Ⓐ $\overset{(1)}{\dot{x}(t) + \alpha x(t) = 0}$, $\overset{(2)}{x(0) = x_0}$.

ESCOLHE $\mathcal{D}'_+$

(3) $\boxed{U(t) \equiv H(t).x(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U'(t) = H'(t)x(t) + H(t)\dot{x}(t) \overset{*}{=}$$

$(1) \times H(t)$

$$\overset{*}{=} \delta(t)x(t) + [-\alpha H(t)x(t)] \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \delta(t)x(0) - \alpha U(t) \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} x_0 \delta - \alpha U$$

ASSIM, $\boxed{U' + \alpha U = x_0 \delta} \Rightarrow (\delta' + \alpha\delta) * U = x_0\delta$.

JÁ SABEMOS QUE $(\delta' + \alpha\delta)^{-1} = H(t)e^{-\alpha t}$ EM $\mathcal{D}'_+$. ENTÃO $U = (H(t)e^{-\alpha t}) * (x_0\delta)$

$$= x_0 H(t) e^{-\alpha t}.$$

TRIVIAL, MAS GERAL!

(B) $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0\,,\quad x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=v_0$

COMO EM (A), $U(t)=H(t)x(t)$ E $\to \mathcal{D}'_+$

$$U'(t)=x_0\,\delta(t)+H(t)\dot{x}(t).$$

AVANÇANDO,

$$U''(t)=x_0\,\delta'(t)+H'(t)\dot{x}(t)+\overbrace{H(t)\ddot{x}(t)}^{-\omega^2 H(t)x(t)}$$

$$=x_0\,\delta'(t)+\delta(t)\dot{x}(t)-\omega^2 H(t)x(t)$$

$$=x_0\,\delta'(t)+\delta(t).v_0-\omega^2 U(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U''(t)+\omega^2 U(t)=x_0\,\delta'(t)+v_0\,\delta(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\delta''+\omega^2\delta)*U=x_0\,\delta'+v_0\,\delta}$$

PODERÍAMOS TER $x(t_0)=x_0$, $\dot{x}(t_0)=v_0$,
$U(t)=H(t-t_0).x(t)$, $\delta(t-t_0)$ E $\delta'(t-t_0)$.

SABENDO QUE $G_+(t)=\dfrac{H(t)\sin(\omega t)}{\omega}$,

$$U(t)=\left[\frac{H(t)\sin(\omega t)}{\omega}\right]*\left[x_0\,\delta'(t)+v_0\,\delta(t)\right]=$$

$$=\frac{v_0}{\omega}H(t)\sin(\omega t)+\frac{x_0}{\omega}\Big[\underbrace{H'(t)\sin\omega t}_{=0}+\omega H(t)\cos(\omega t)\Big]$$

$$=H(t)\left\{x_0\cos(\omega t)+\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\right\}.$$