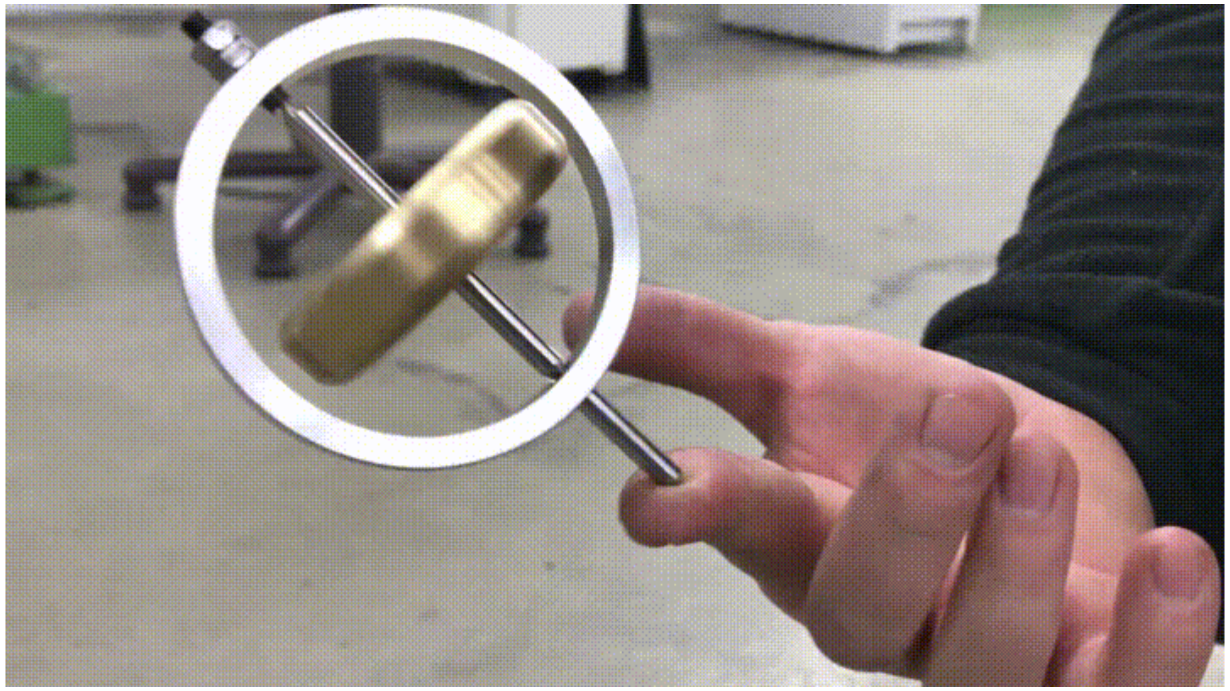
Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo



O movimento de um giroscópio parece desafiar a lei da gravidade

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 3 de Dezembro de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Trabalho e potência no movimento de rotação**
- **Momento angular**
- **Conservação do momento angular**
- **Giroscópio e precessão**
- **Exercícios de Fixação**

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Trabalho e potência no movimento de rotação
- Momento angular
- Conservação do momento angular
- Giroscópio e precessão
- Exercícios de Fixação

Trabalho realizado pelo torque

- **Quando você pedala, aplica forças a um corpo que gira e realiza um trabalho sobre ele. Eventos semelhantes ocorrem em outras situações da vida real**

- **Suponha que uma força tangencial atue sobre uma roda como mostrado**
  - *O trabalho realizado pela força é* $dW = F_{tan}\, ds = F_{tan}\, R\, d\theta$
  - *No entanto,* $\tau_z = F_{tan} R$*, de modo que* $dW = \tau_z\, d\theta$

Trabalho realizado por um toque τ_z

Limite superior = posição angular final

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta$$

Integral do torque em função do ângulo

Limite inferior = posição angular inicial

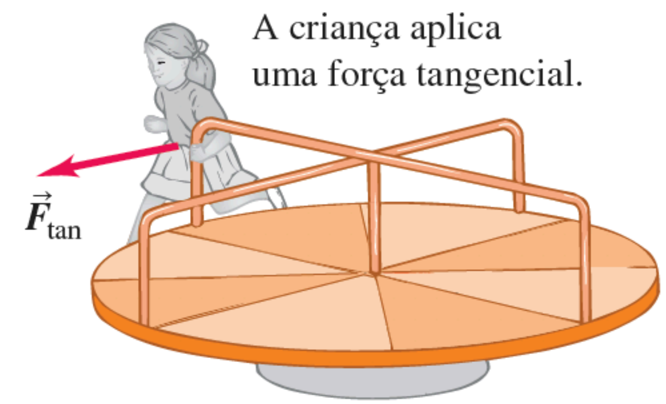
  - *No caso de o torque permanecer constante:*

Trabalho realizado por um torque constante τ_z

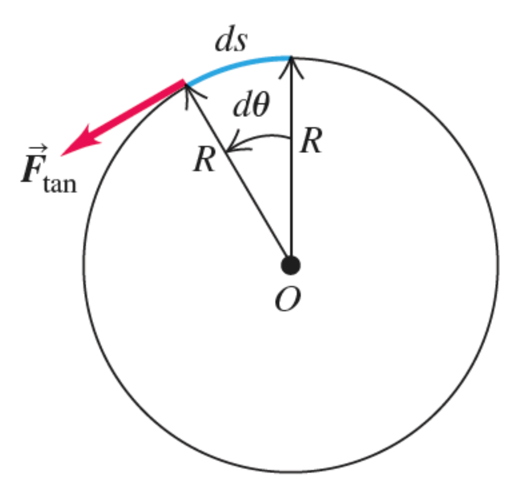
Torque

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta$$

Posição angular final menos inicial = deslocamento angular



Vista do topo de um gira-gira



O teorema trabalho-energia para o movimento de rotação

- **Quando um torque realiza trabalho sobre um corpo rígido, sua energia cinética varia por uma quantidade igual ao trabalho realizado**

- **Podemos provar isso usando exatamente o mesmo procedimento adotado no Capítulo 6 para a energia cinética de translação de uma partícula**
  - *Sabendo* $dW = \tau_z\, d\theta$ *e que* $\tau_z = I\,\alpha_z$, *temos que*

$$dW = \tau_z\, d\theta = I\,\alpha_z\, d\theta = I\,\frac{d\omega_z}{dt}\,d\theta = I\left(\frac{d\omega_z}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\right)d\theta = I\,\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d\omega_z}{d\theta}\,d\theta\right) = I\,\frac{d\theta}{dt}\,d\omega_z = I\,\omega_z\, d\omega_z$$

  - *De modo que o teorema trabalho-energia pode ser reescrito como*

O trabalho total realizado sobre um corpo rígido em rotação = trabalho realizado pelo torque externo resultante

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z\, d\omega_z = \overbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_2^2}^{\text{Energia cinética de rotação final}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}I\omega_1^2}_{\text{Energia cinética de rotação inicial}}$$

Qual é a relação entre potência e torque?

- **Dividindo ambos os membros da equação $dW = \tau_z \, d\theta$ pelo intervalo dt durante o qual ocorre o deslocamento angular, obtemos**

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

- **Sabendo que dW/dt é a taxa de produção de trabalho, ou potência (P), e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω_z, temos que**

Potência decorrente de um torque atuando sobre um corpo rígido

Torque com relação ao eixo de rotação do corpo

$$P = \tau_z \omega_z$$

Velocidade angular do corpo em torno do eixo

- **Essa relação é o análogo da relação $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, que foi desenvolvida no Capítulo 6 para uma partícula**

Qual é a relação entre potência e torque?

- **Dividindo ambos os membros da equação $dW = \tau_z \, d\theta$ pelo intervalo dt durante o qual ocorre o deslocamento angular, obtemos**

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

- **Sabendo que dW/dt é a taxa de produção de trabalho, ou potência (P), e $d\theta/dt$ é a velocidade angular ω_z, temos que**

Potência decorrente de um torque atuando sobre um corpo rígido

Torque com relação ao eixo de rotação do corpo

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

Velocidade angular do corpo em torno do eixo

- **Essa relação é o análogo da relação $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, que foi desenvolvida no Capítulo 6 para uma partícula**

Exemplo: cálculo da potência pelo torque

- **Um motor elétrico exerce um torque constante de 10 N·m sobre um rotor de esmeril que possui um momento de inércia de 2,0 kg·m² em torno de seu eixo. O sistema parte do repouso. Ache o trabalho realizado pelo motor em 8,0 s e a energia cinética do rotor nesse momento. Qual é a potência média entregue pelo motor?**

$$\tau_z = I\alpha_z \quad \rightarrow \quad \alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{10\,N\cdot m}{2{,}0\,kg\cdot m^2} = 5{,}0\,rad/s^2$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \cancel{\omega_{z0}t} + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5{,}0\,rad/s^2)(8{,}0\,s)^2 = 160\,rad$$

$$W = \tau_z\,\Delta\theta = (10\,N\cdot m)(160\,rad) = 1{,}6\,kJ$$

$$\omega_z = \cancel{\omega_{z0}} + \alpha_z t = (5{,}0\,rad/s^2)(8{,}0\,s) = 40\,rad/s$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2{,}0\,kg\cdot m^2)(40\,rad/s)^2 = 1{,}6\,kJ$$

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1{,}6\,kJ}{8{,}0\,s} = 200\,J/s = 200\,W$$

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Trabalho e potência no movimento de rotação
- **Momento angular**
- Conservação do momento angular
- Giroscópio e precessão
- Exercícios de Fixação

A definição de momento angular

- **Para cada grandeza referente ao movimento de rotação, existe uma grandeza análoga referente ao movimento de translação de uma partícula**
  - *O análogo ao momento linear de uma partícula é o MOMENTO ANGULAR*

- **A relação entre o momento angular ($\overrightarrow{\mathbf{L}}$) com o momento linear ($\overrightarrow{\mathbf{p}}$) é exatamente a mesma que liga o torque com a força, ou seja,** $\vec{\tau} = \overrightarrow{\mathbf{r}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}$

- **Para uma partícula com massa constante (m) e velocidade $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, o momento angular $\overrightarrow{\mathbf{L}}$, medido com relação à um dado ponto, é dado por**

Momento angular de uma partícula em relação à origem O de um sistema de referência inercial

Vetor posição da partícula relativo a O

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

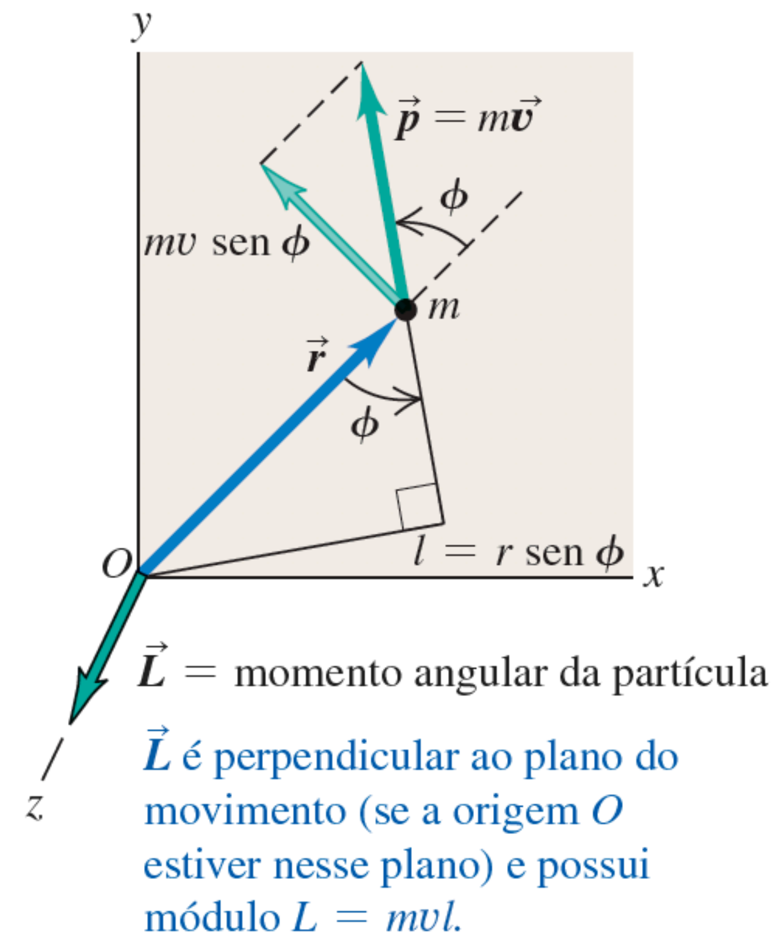
Momento linear da partícula = massa vezes velocidade

A definição de momento angular

- **Na Figura ao lado, uma partícula se move no plano x-y. Seu vetor posição e seu momento linear estão indicados**
  - *O vetor do momento angular é ortogonal ao plano x-y*
  - *A regra da mão direita para o produto vetorial mostra que sua direção está ao longo do eixo Oz e seu módulo é*

$$L = |\vec{\mathbf{L}}| = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = m\,v\,r\,sen(\phi) = m\,v\,l$$

  - *Aqui, l é a distância perpendicular do ponto O à linha da direção do vetor $\vec{\mathbf{v}}$*
  - *Note que l desempenha o papel do "braço de alavanca" para o vetor momento linear*



A relação entre torque e variação do momento angular

- **Quando uma força atua sobre uma partícula, sua velocidade e seu momento linear variam, de modo que seu momento angular também pode variar**

- **Podemos mostrar que a taxa de variação do momento angular é igual ao torque desta força**

- **Tomando a derivada da equação $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ em relação ao tempo, e usando a regra da derivada de um produto, encontramos que**

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \cancel{\vec{\mathbf{v}} \times \left(m\vec{\mathbf{v}}\right)} + \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\tau} \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

  - *A taxa de variação do momento angular DE UMA PARTÍCULA é igual ao torque da força resultante que atua sobre ela*
  - *Essa relação é o análogo da relação* $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$, *que foi desenvolvida no Capítulo 6 para uma partícula*

Momento angular de um corpo rígido

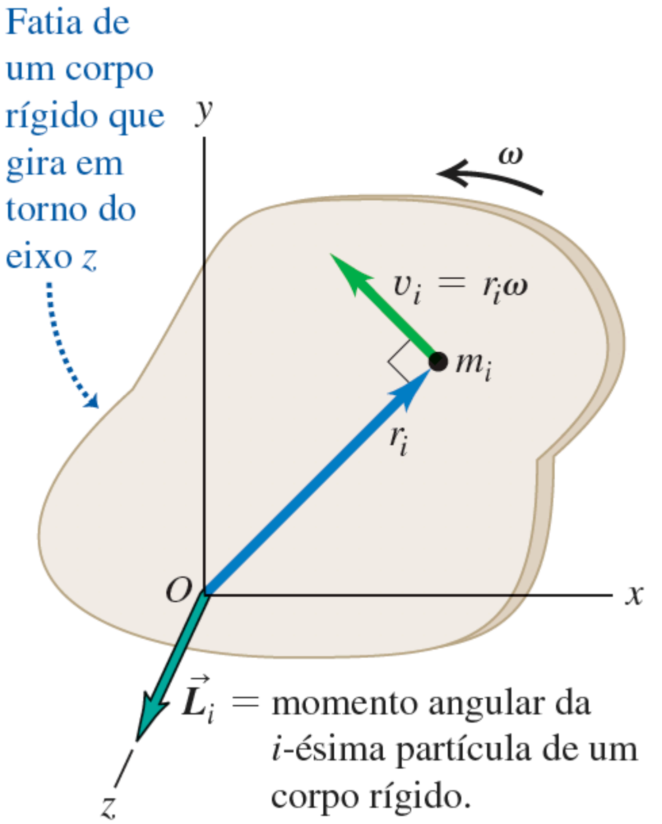
- **Podemos usar a equação $L = m\,v\,r\,sen(\phi)$ para achar o momento angular total de um corpo rígido que gira em torno do eixo Oz com velocidade angular $\vec{v}$**

- **Considere uma fatia fina do corpo situada sobre o plano x-y**
  - *Cada partícula dessa fatia se move em um círculo centralizado na origem*
  - *Em cada instante, sua velocidade é perpendicular ao vetor posição. Logo, $\phi = 90^\circ$ para cada partícula*
  - *Uma partícula com massa m_i, a uma distância r_i do ponto O, possui velocidade $v_i = \omega\, r_i$*
  - *Portanto, o módulo de seu momento angular é*

$$L_i = m_i\, v_i\, r_i = m_i\,(\omega\, r_i)\, r_i = m_i\, r_i^2\, \omega$$

- **O momento angular total da fatia do corpo é a soma dos momentos angulares de todas as partículas**

$$L = \Sigma L_i = \left(\Sigma\, m_i\, r_i^2\right)\omega = I\,\omega$$



$\vec{L}_i$ é perpendicular ao plano do movimento (se a origem O estiver nesse plano) e possui módulo $L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$.

Momento angular de um corpo rígido

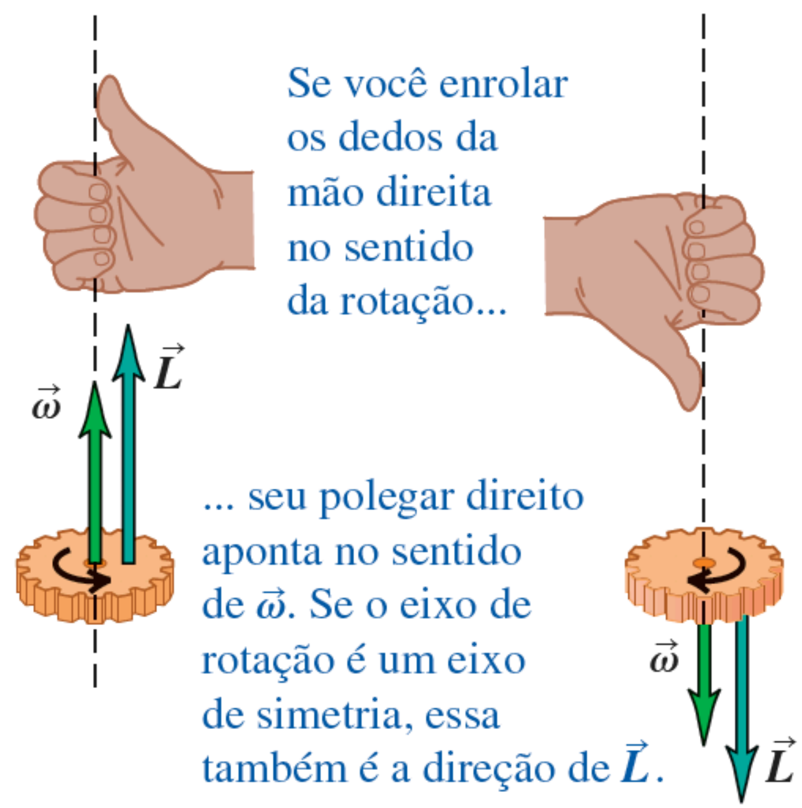
- **Podemos adotar o procedimento anterior para todas as fatias do corpo rígido que sejam paralelas ao plano x-y**
  - *O momento angular total da fatia do corpo no espaço 3D é a soma dos momentos angulares de todas as partículas nas 3 direções do espaço*

Momento angular de um corpo rígido girando em torno de um eixo de simetria

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Momento de inércia do corpo do eixo de simetria

Vetor de velocidade angular do corpo



Exemplo: momento angular e torque de uma hélice

- **A hélice da turbina de um motor a jato possui momento de inércia 2,5 kg·m² em torno do eixo de rotação. Quando a turbina começa a girar, sua velocidade angular é dada por $\omega_z(t) = (40\, rad/s^3)t^2$. (a) Calcule o momento angular da hélice em função do tempo e ache seu valor no instante t = 3,0 s. (b) Determine o torque resultante que atua sobre a hélice em função do tempo e calcule seu valor para t=3,0 s.**

$$L_z(t) = I\,\omega_z(t) = (2{,}5\,kg\cdot m^2)(40\,rad/s^3)t^2 = (100\,kg\cdot m^2/s^3)t^2$$

$$L_z(t = 3{,}0\,s) = I\,\omega_z(t = 3{,}0\,s) = (100\,kg\cdot m^2/s^3)(3{,}0\,s)^2 = 900\,kg\cdot m^2/s$$

$$\tau_z(t) = \frac{dL_z}{dt} = (100\,kg\cdot m^2/s^3)2\,t = (200\,kg\cdot m^2/s^3)\,t$$

$$\tau_z(t = 3{,}0\,s) = \frac{dL_z}{dt} = (200\,kg\cdot m^2/s^3)\,(3{,}0\,s) = 600\,N\cdot m$$

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Trabalho e potência no movimento de rotação
- Momento angular
- **Conservação do momento angular**
- Giroscópio e precessão
- Exercícios de Fixação

A conservação do momento angular

- **Assim como a conservação da energia e a conservação do momento linear, a conservação do momento angular constitui uma lei universal de conservação, válida em todas as escalas**
  - *Desde sistemas atômicos e nucleares até o movimento de galáxias*

- **Esse princípio decorre diretamente do fato**

$$\vec{\tau} = \Sigma\,\vec{\tau}_{\mathbf{i}} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{L}}}{dt}$$

- **Quando** $\Sigma\,\tau_i = 0$ **temos, então, que** $\dfrac{d\overrightarrow{\mathbf{L}}}{dt} = 0$, **ou seja,** $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ **é um vetor constante**

> **Quando o torque externo resultante que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular do sistema permanece constante (se conserva).**

A conservação do momento angular

- **Suponha que uma acrobata tenha acabado de sair de um salto com os braços e perna estendidos, girando no sentido anti-horário em torno de seu centro de massa**
  - *Quando ela fecha os braços e as pernas, seu momento de inércia em relação ao centro de massa passa de um valor grande* I_1 *a um valor muito menor* I_2
  - *A única força externa atuante na acrobata é seu peso, que não possui nenhum torque em relação a um eixo passando pelo centro de massa*
  - *Logo, o momento angular da acrobata permanece constante, e sua velocidade angular cresce à medida que seu momento de inércia diminui*

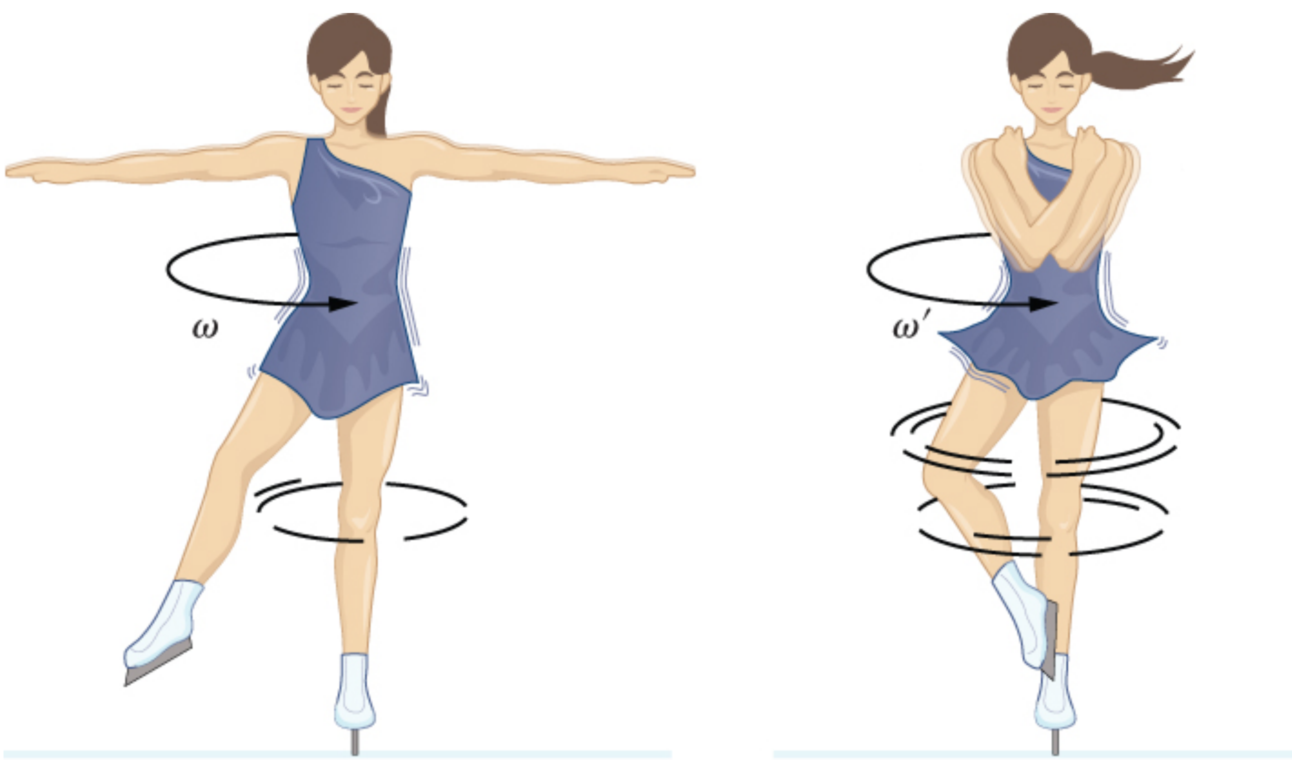
$$L_{1z} = I_1\,\omega_{1z} = I_2\,\omega_{2z} = L_{2z}$$

  - *Quando a acrobata gira com os braços estendidos e a seguir os recolhe, sua velocidade angular aumenta à medida que seu momento de inércia diminui*

Bailarinas(os) sabem como aplicar a conservação do momento angular durante uma apresentação

- **Pela conservação do momento angular:** $L_{1z} = I_1\,\omega_{1z} = I_2\,\omega_{2z} = L_{2z}$

$L_z = I_1\,\omega_{1z}$ $\qquad$ $L_z = I_2\,\omega_{2z}$

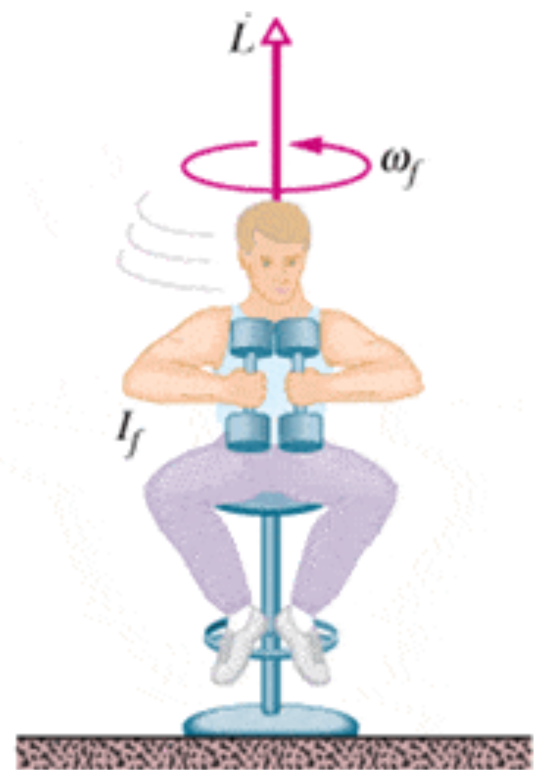


Os que não sabem dançar (😉) também sabem como aplicar a conservação do momento angular

- **Pela conservação do momento angular:** $L_{1z} = I_1\,\omega_{1z} = I_2\,\omega_{2z} = L_{2z}$

$$L_z = I_1\,\omega_{1z}$$

$$L_z = I_2\,\omega_{2z}$$



A conservação do momento angular de um sistema composto por várias partes: o momento angular total se conserva

- **Considere dois corpos, A e B, interagindo apenas entre si**
  - *Suponha que o corpo A exerça uma força* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A\,em\,B}}$ *sobre o corpo B*
  - *O torque correspondente (em relação a qualquer ponto) é* $\vec{\tau}_{\mathbf{A\,em\,B}}$
  - *O torque* $\vec{\tau}_{\mathbf{A\,em\,B}}$ *é igual à taxa de variação de* $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}$*:*

$$\vec{\tau}_{\mathbf{A\,em\,B}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}}{dt}$$

  - *Ao mesmo tempo, o corpo B exerce sobre A uma força* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B\,em\,A}}$*, com o torque correspondente (em relação a qualquer ponto) sendo* $\vec{\tau}_{\mathbf{B\,em\,A}}$
  - *O torque* $\vec{\tau}_{\mathbf{B\,em\,A}}$ *é igual à taxa de variação de* $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}}$*:*

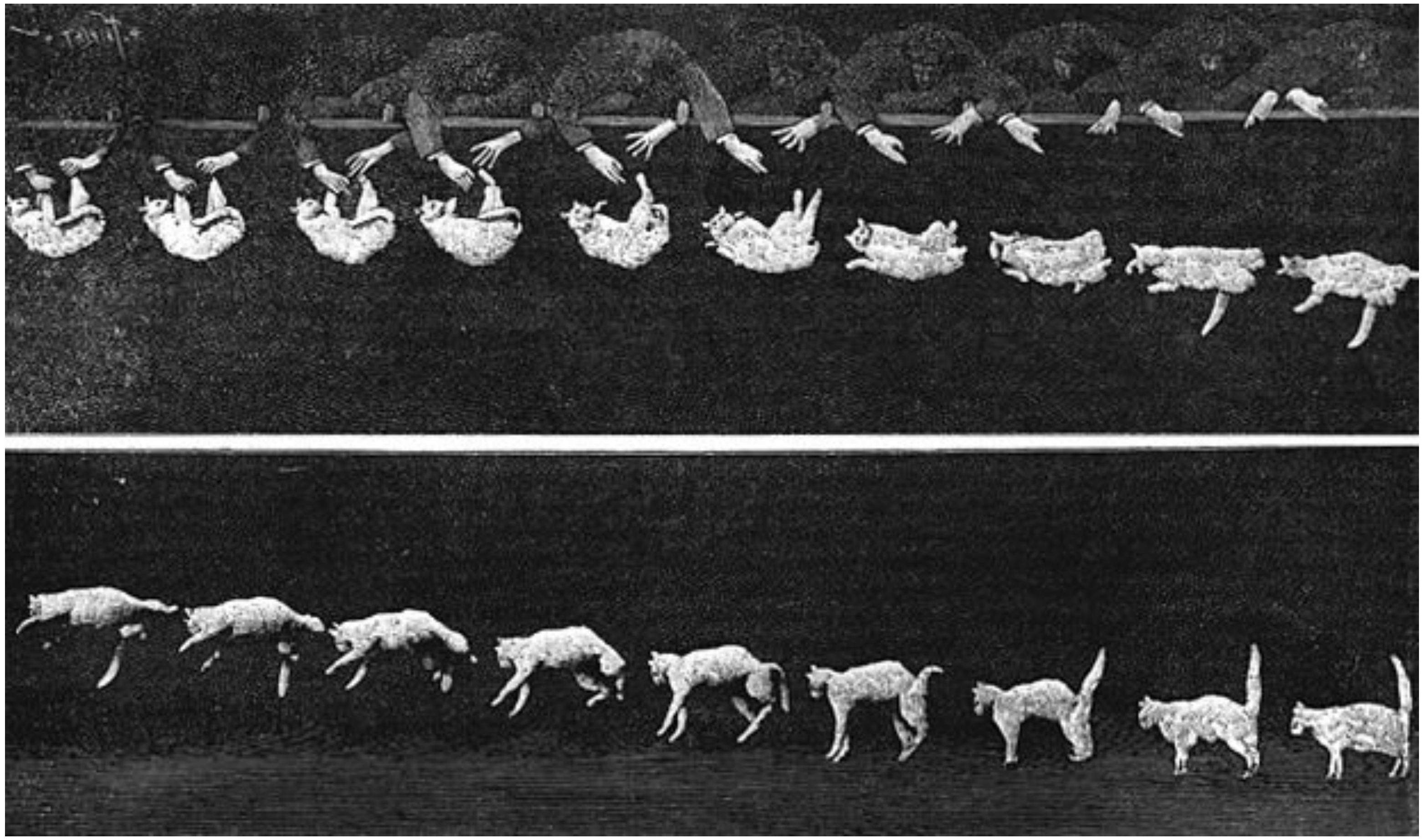
$$\vec{\tau}_{\mathbf{B\,em\,A}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}}}{dt}$$

  - *Pela terceira lei de Newton,* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{A\,em\,B}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{B\,em\,A}}$ *e, portanto,* $\vec{\tau}_{\mathbf{A\,em\,B}} = -\vec{\tau}_{\mathbf{B\,em\,A}}$
  - *Logo, temos que*

$$\vec{\tau}_{\mathbf{B\,em\,A}} + \vec{\tau}_{\mathbf{A\,em\,B}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total}}}{dt} = 0 \qquad \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total}}$$

Gatos sabem como aplicar a conservação de momento angular durante uma queda

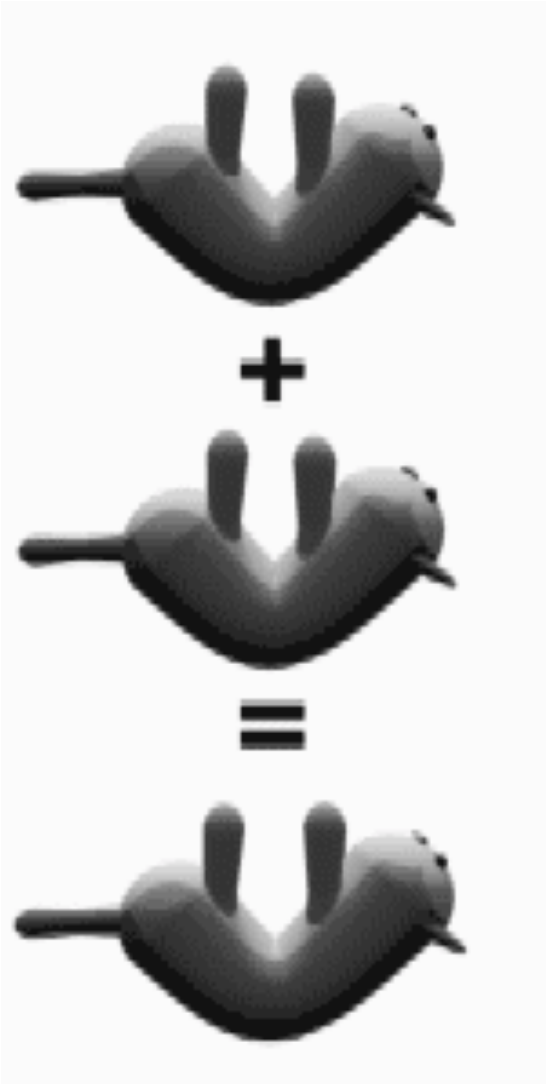
- **O problema do "gato caindo" atraiu o interesse de vários cientistas**
  - *Por exemplo George G. Stokes e James C. Maxwell*
  - *A solução do problema veio de Kane & Scher*
    - *A dynamical explanation of the falling cat phenomenon*
    - *International Journal of Solids Structures,* ***5*** *(7): 663–670 (1969)*

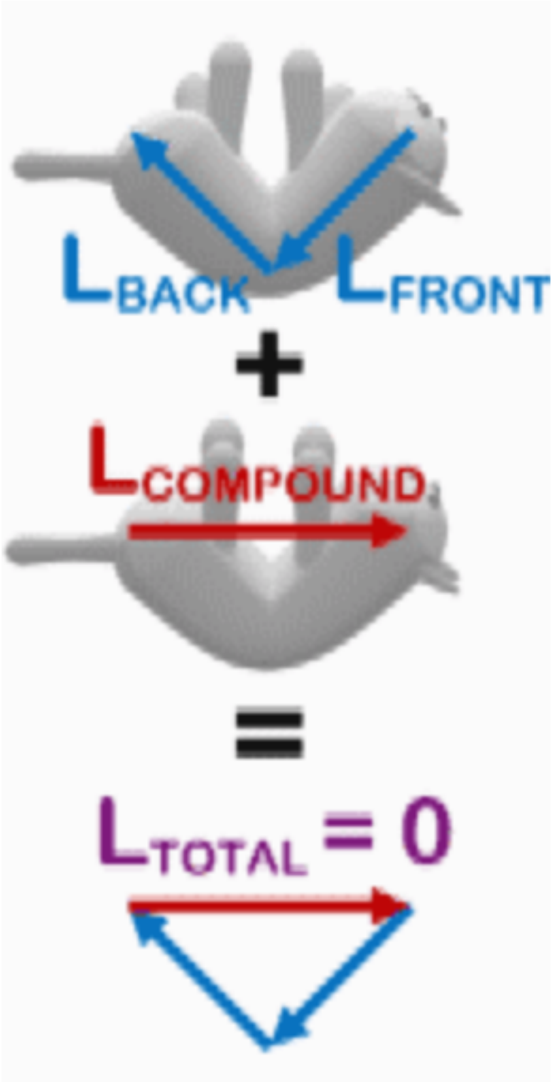


Gatos sabem como aplicar a conservação de momento angular durante uma queda

- **Pela conservação do momento angular:**

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{traseira}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{dianteira}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{adicional}} = 0$$

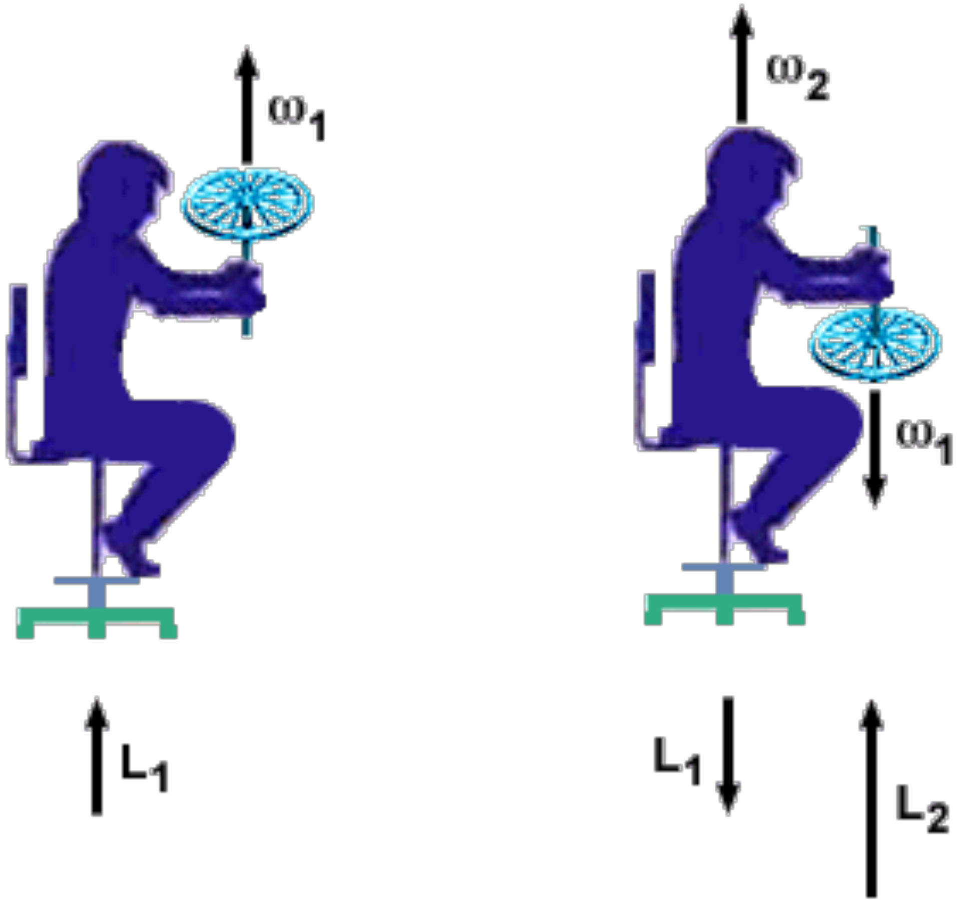




Outro exemplo de conservação do momento angular

- **Pela conservação do momento angular:** $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{homem}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{roda}}$

$$\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total,1}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{roda}} \qquad \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total,2}} = -\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{roda}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{homem}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total,1}} \quad \rightarrow \quad \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{homem}} = 2\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{roda}}$$

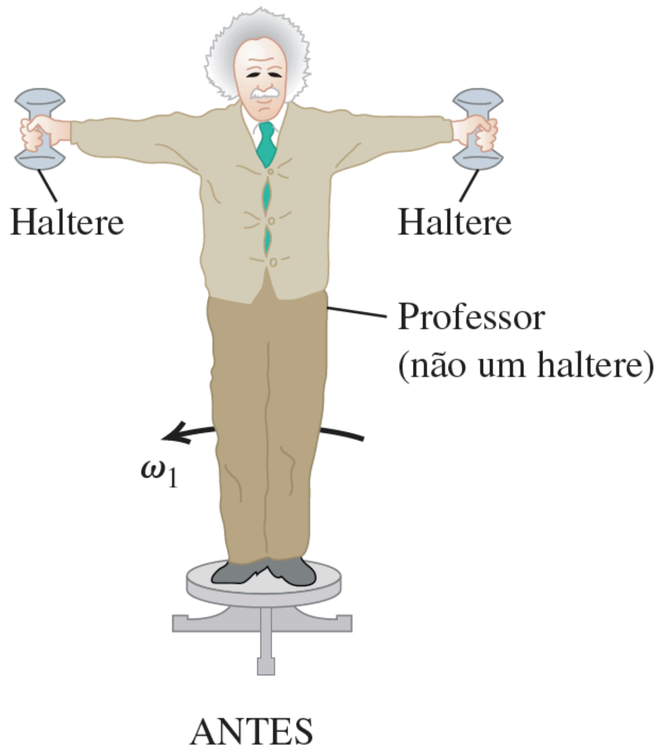


Mais um exemplo de conservação do momento angular

- **Pela conservação do momento angular:** $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{total}} = \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{homem}} + \vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{roda}}$

Exemplo 10.10: Qualquer um pode ser um bailarino (para casa)

- Uma pessoa está em pé sobre o centro de uma mesa giratória, mantendo os braços estendidos horizontalmente com um haltere de 5,0 kg em cada mão. Ele está girando em torno de um eixo vertical e completa uma volta em 2,0 s. Calcule a nova velocidade angular do professor, quando ele aproxima os dois halteres do abdome. Seu momento de inércia (sem os halteres) é igual a 3,0 kg·m² quando seus braços estão estendidos. Este diminui para 2,2 kg·m² quando suas mãos estão próximas do abdome. Os halteres estão inicialmente a uma distância de 1,0 m do eixo e a distância final é igual a 0,20 m.



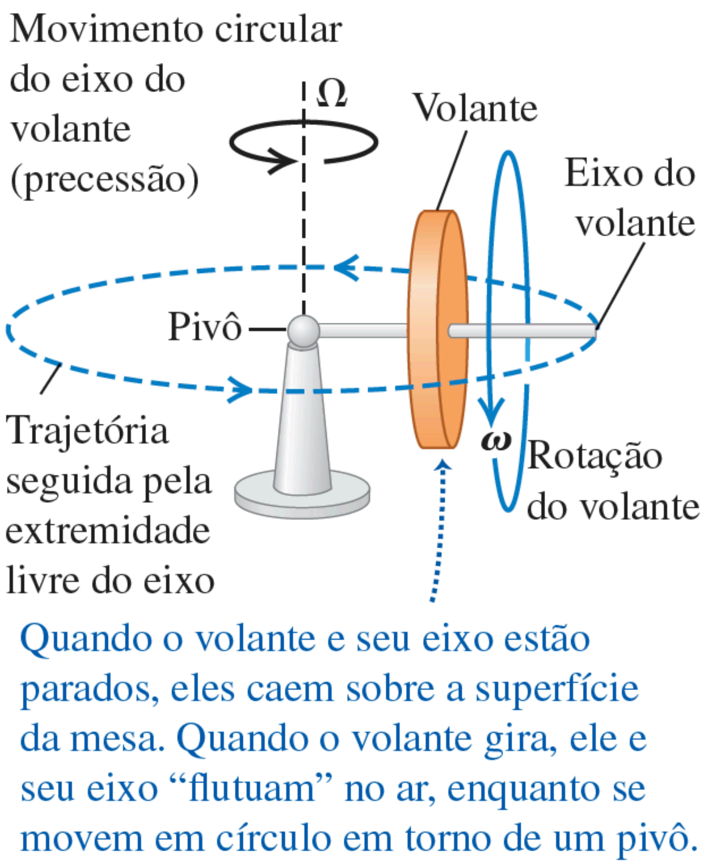
Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Trabalho e potência no movimento de rotação
- Momento angular
- Conservação do momento angular
- **Giroscópio e precessão**
- Exercícios de Fixação

Fenômenos físicos inesperados podem ocorrer quando o eixo de rotação de um corpo rígido muda de direção

- **Em todas as situações analisadas neste capítulo até o momento, o eixo de rotação permanecia fixo ou se movia mantendo sempre a mesma direção**
  - *Diversos fenômenos físicos novos, alguns até inesperados, podem ocorrer quando o eixo de rotação muda de direção*

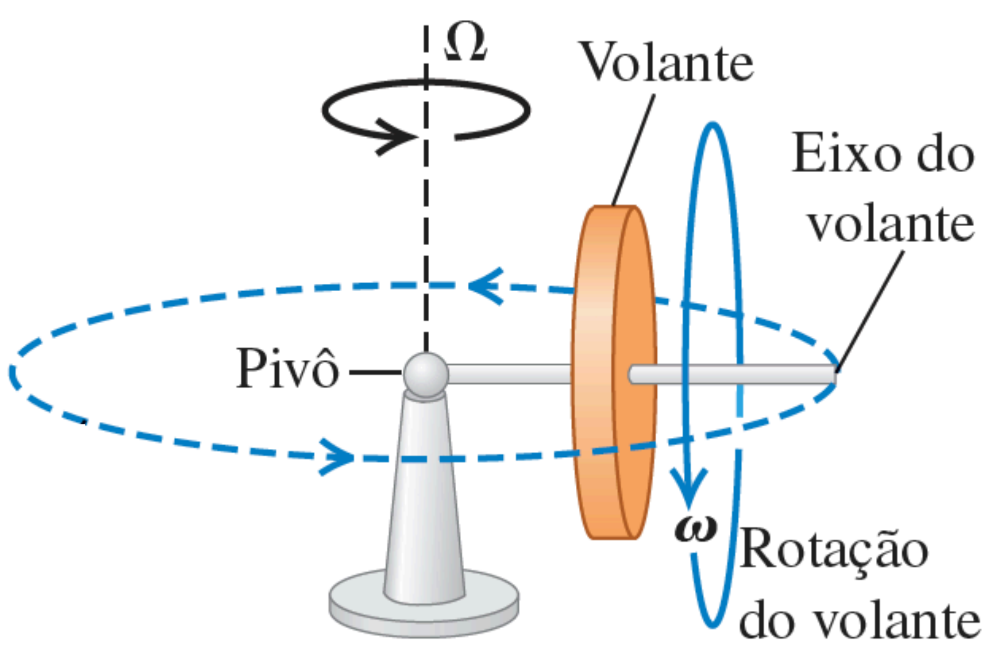
- **Considere um giroscópio suportado em uma de suas extremidades**
  - *Se o eixo do volante for inicialmente colocado na horizontal e solto, sua extremidade livre começará a cair sob a ação da gravidade*
  - *Porém, quando o volante está girando, o que ocorre é bastante diferente*



Fenômenos físicos inesperados podem ocorrer quando o eixo de rotação de um corpo rígido muda de direção

- **Em todas as situações analisadas neste capítulo até o momento, o eixo de rotação permanecia fixo ou se movia mantendo sempre a mesma direção**
  - *Diversos fenômenos físicos novos, alguns até inesperados, podem ocorrer quando o eixo de rotação muda de direção*

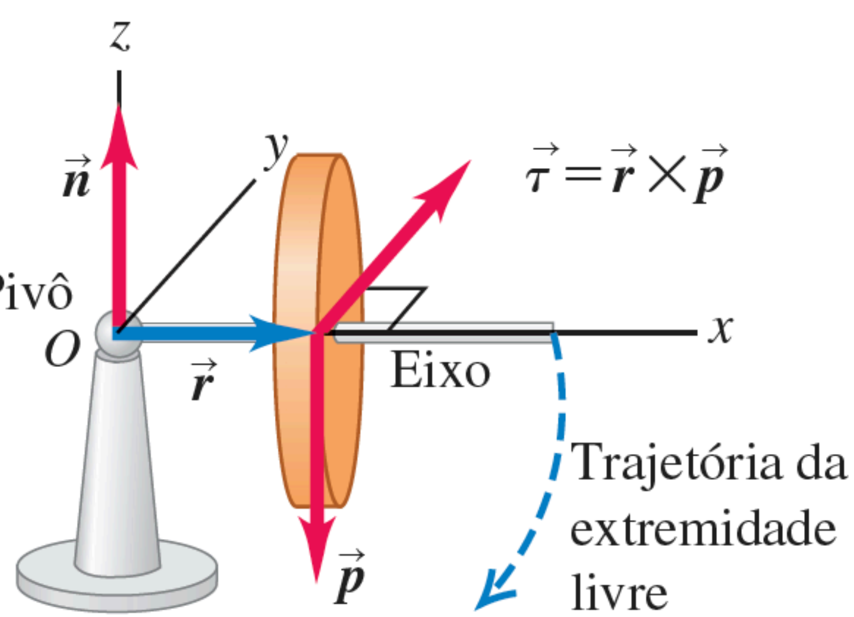
- **Considere um giroscópio suportado em uma de suas extremidades**



O movimento de precessão de um giroscópio

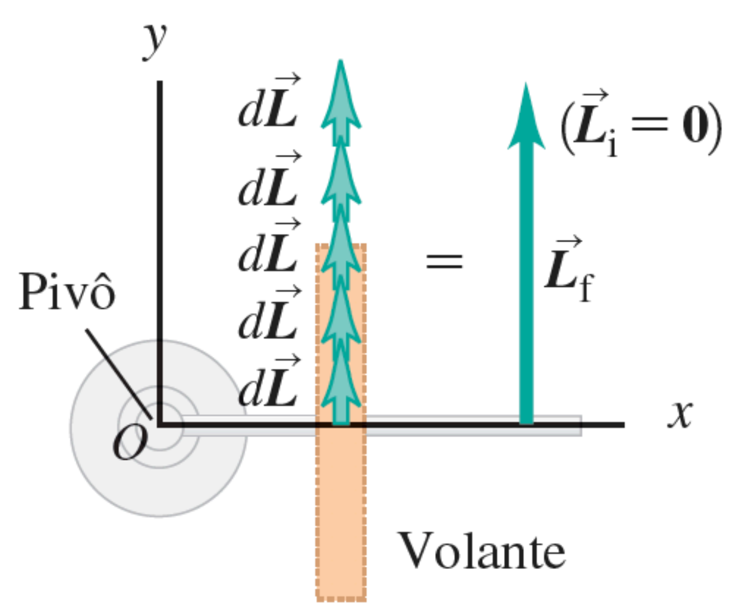
- **Sabemos que** $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \rightarrow d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\tau}\,dt$ **, temos que (para o caso onde o giroscópio NÃO ESTÁ girando):**

(a) O volante que não gira cai



Quando o volante não está girando, seu peso cria um torque em torno do pivô, fazendo com que ele caia ao longo de uma trajetória circular até que seu eixo fique em repouso sobre a superfície da mesa.

(b) Vista de cima para baixo da queda do volante



Na queda, o volante gira em torno do pivô e assim adquire um momento angular $\vec{L}$. A *direção* de $\vec{L}$ permanece constante.

O movimento de precessão de um giroscópio

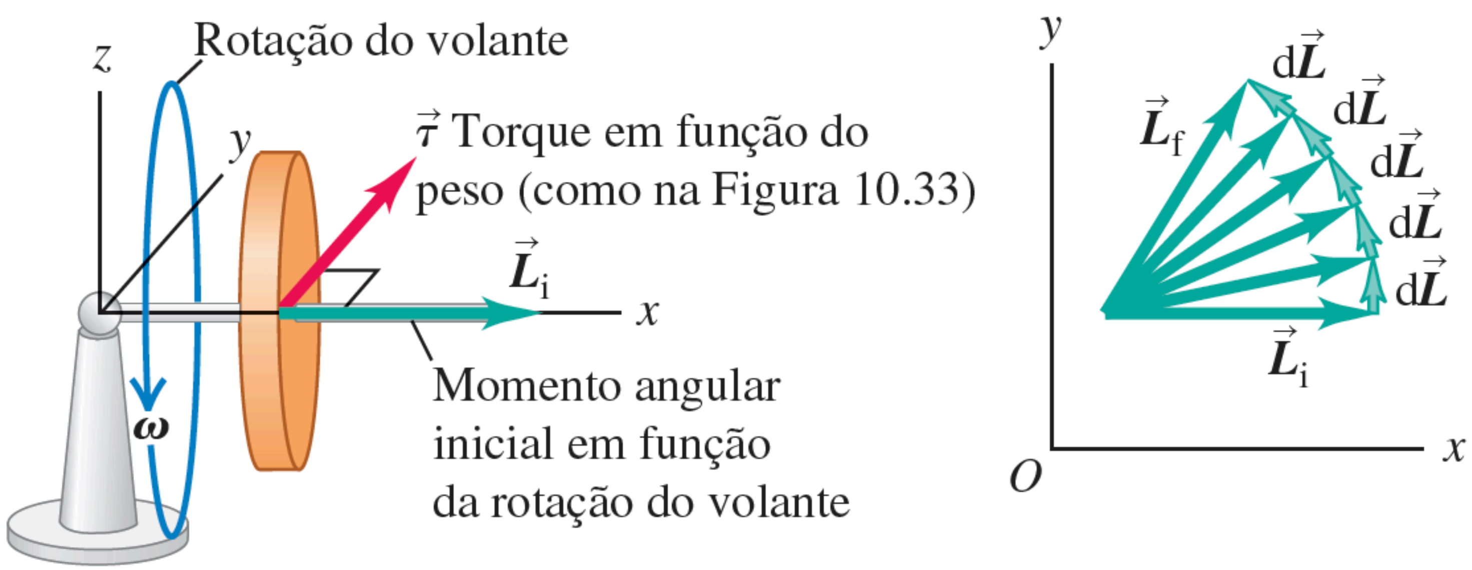
- **Sabemos que** $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} \;\rightarrow\; d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\tau}\,dt$, **temos que (para o caso onde o giroscópio ESTÁ girando):**

(a) Volante em rotação

Quando o volante está girando, o sistema se inicia com um momento angular $\vec{L}_i$ paralelo ao eixo de rotação do volante.

(b) Vista do topo

Agora o efeito do torque deve fazer com que o momento angular sofra precessão em torno do pivô. O giroscópio gira em torno de seu pivô sem cair.



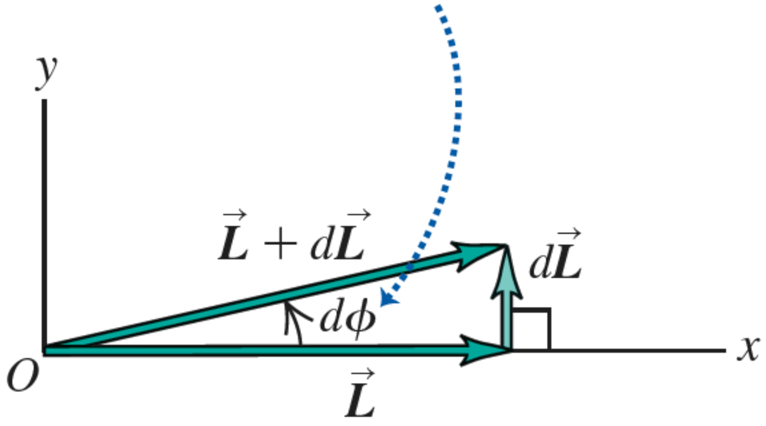
O movimento de precessão de um giroscópio

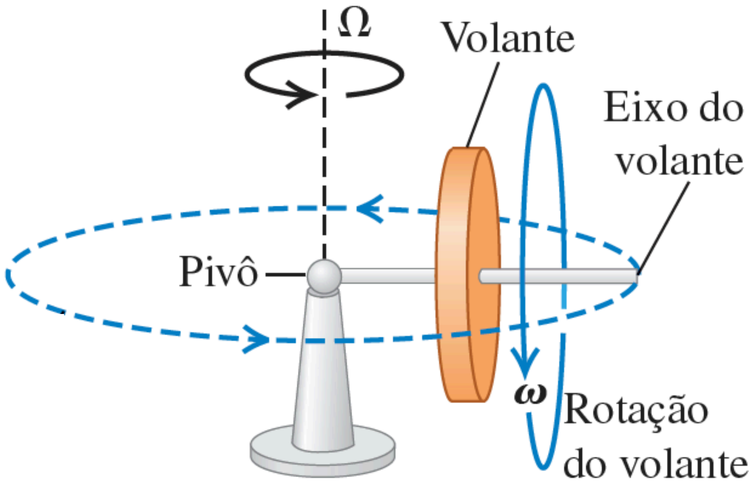
- **A velocidade angular de precessão do eixo de rotação pode ser calculada**
  - *Sabendo que* $|d\vec{\mathbf{L}}| = |\vec{\mathbf{L}}|\, d\phi$, *temos que*

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{\mathbf{L}}|/|\vec{\mathbf{L}}|}{dt} = \frac{dL}{dt}\frac{1}{L} = \frac{\tau}{L}$$

$$\Omega = \frac{r\,F_g}{I\,\omega} = \frac{r\,m\,g}{I\,\omega}$$

Em um intervalo dt, o vetor momento angular e o eixo do volante (ao qual é paralelo) realizam uma precessão por meio de um ângulo $d\phi$.





Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos das seções 10.4, 10.5, 10.6 e 10.7**
  - *Exercícios da seção 10.4: 10.32 e 10.34*
  - *Exercícios da seção 10.5: 10.35, 10.37, 10.38 e 10.39*
  - *Exercícios da seção 10.6: 10.40, 10.41, 10.43, 10.45 e 10.47*
  - *Exercícios da seção 10.7: 10.51 e 10.52*