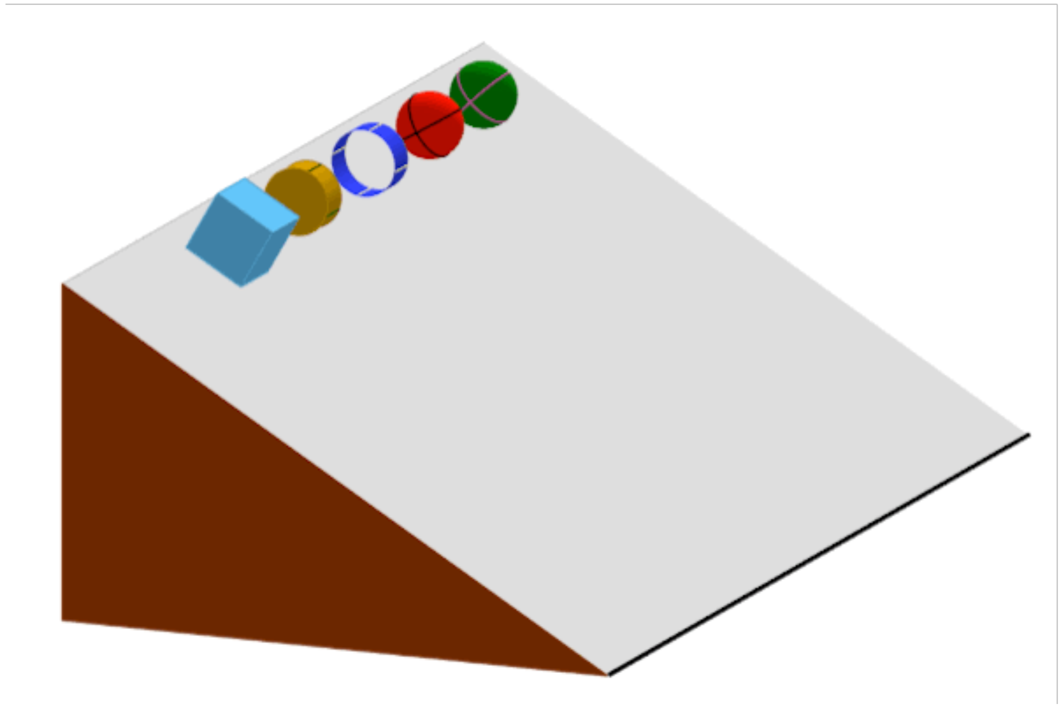
Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo



Corpos de mesma massa, mas com diferente distribuição espacial de massa, rolam diferentemente

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 26 de Novembro de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Torque**
- **Torque e aceleração angular**
- **Rotação em torno de um eixo móvel**
- **Exercícios de Fixação**

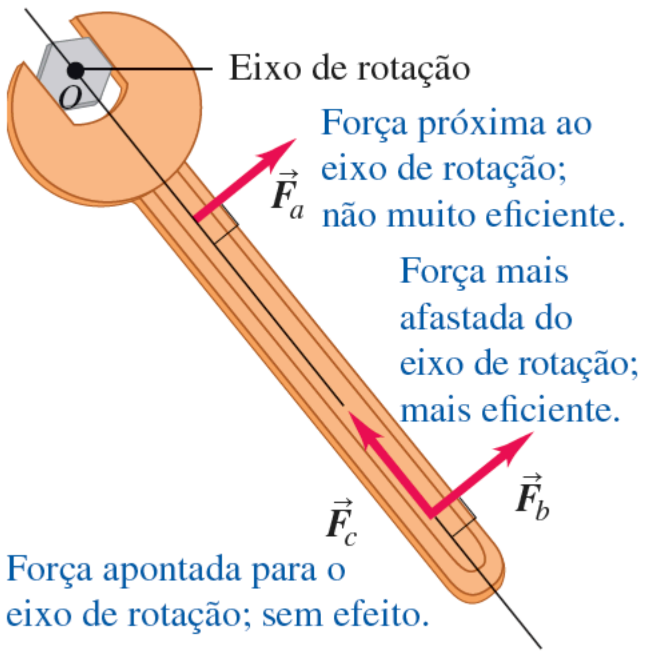
Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Torque**
- Torque e aceleração angular
- Rotação em torno de um eixo móvel
- Exercícios de Fixação

Quais grandezas de uma força são relevantes para alterar o movimento de rotação de um corpo rígido?

- **Sabemos que as forças que atuam sobre um corpo podem afetar seu movimento de translação - ou seja, o movimento como um todo pelo espaço**
  - *Agora, queremos aprender quais aspectos de uma força determinam sua eficácia em causar ou alterar o movimento de rotação*

- **O módulo, a direção e o sentido da força são importantes, mas o ponto de aplicação da força também é relevante**
  - $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$ *é mais eficiente que* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{a}}$
  - $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{c}}$ *não ajuda em nada, mesmo sendo aplicada no mesmo ponto que* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$ *e tendo mesmo módulo que* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$



- **A medida quantitativa de como a ação de uma força pode provocar ou alterar o movimento de rotação de um corpo é chamada de TORQUE**

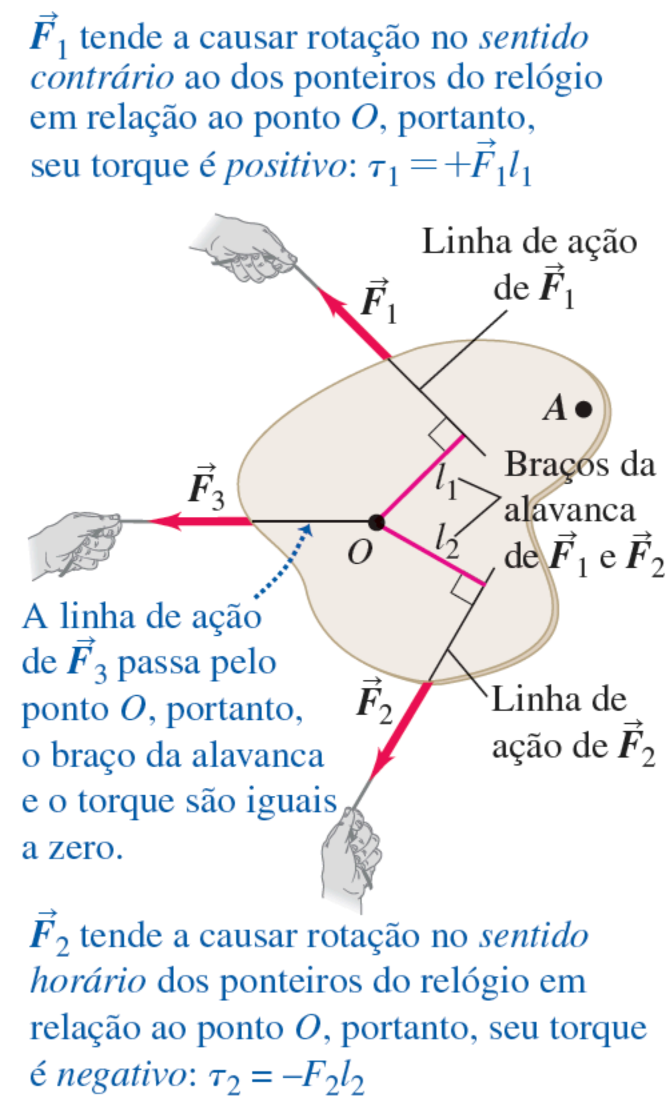
O torque depende de quais grandezas?

- **A figura abaixo mostra três exemplos de como calcular o torque. O corpo na figura pode girar em torno de um eixo passando pelo ponto O que é perpendicular ao plano da figura**

- **A tendência da força $\vec{\mathbf{F}}_1$ para produzir rotação em torno do ponto O depende do módulo de $\vec{\mathbf{F}}_1$**

- **Depende, também, da distância perpendicular l_1 entre o ponto O e a linha de ação da força, isto é, a linha ao longo da qual o vetor força se encontra**

- **Denominamos a distância l_1 por braço da alavanca, ou braço do momento, da força $\vec{\mathbf{F}}_1$ em torno do ponto O**



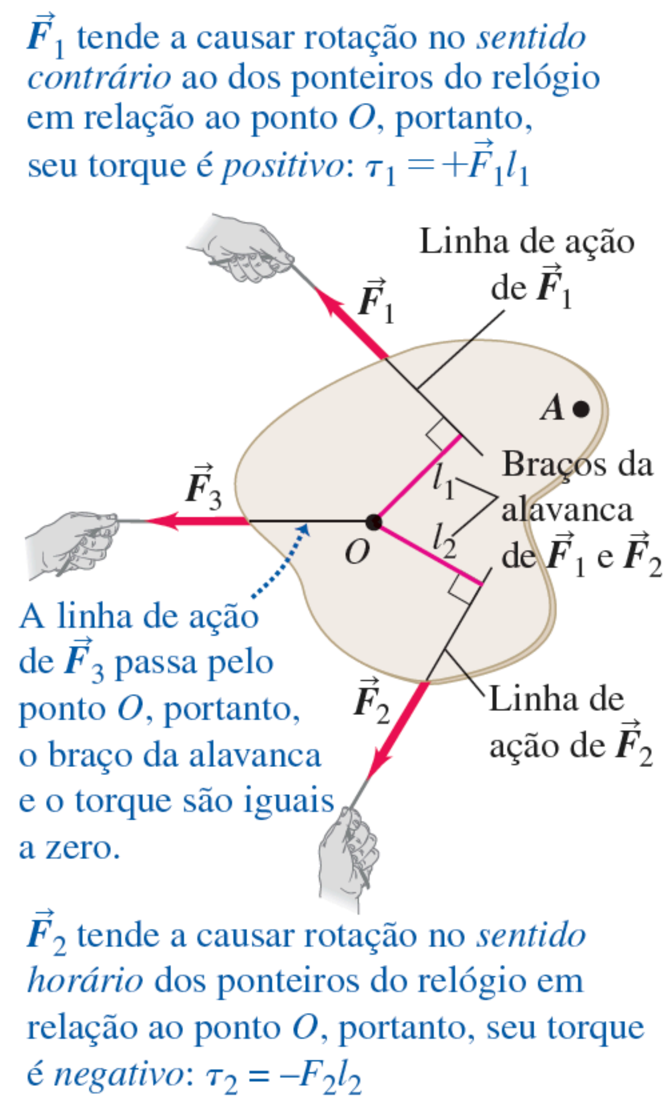
Definições de torque

- **O esforço de torção depende simultaneamente de $\vec{\mathbf{F}}_1$ e de l_1, por isso definimos o torque (ou momento) da força $\vec{\mathbf{F}}_1$ em relação ao ponto O como o produto $F_1 \, l_1$**
  - *Usaremos a letra grega τ ("tau") para o torque*

- **Para uma fora de módulo F cuja linha de ação seja perpendicular à uma distância l ao ponto O, o torque é $\tau = F\,l$**
  - *Físicos normalmente usam o termo "torque", enquanto engenheiros usam o termo "momento"*

Definições de torque

- **Note que**
  - *O momento de $\vec{\mathbf{F}}_1$ é a distância perpendicular l_1*
  - *O momento de $\vec{\mathbf{F}}_2$ é a distância perpendicular l_2*
  - *A linha de ação da força $\vec{\mathbf{F}}_3$ passa pelo ponto de referência O, de modo que o momento de $\vec{\mathbf{F}}_3$ é zero e seu torque em relação ao ponto O é nulo*



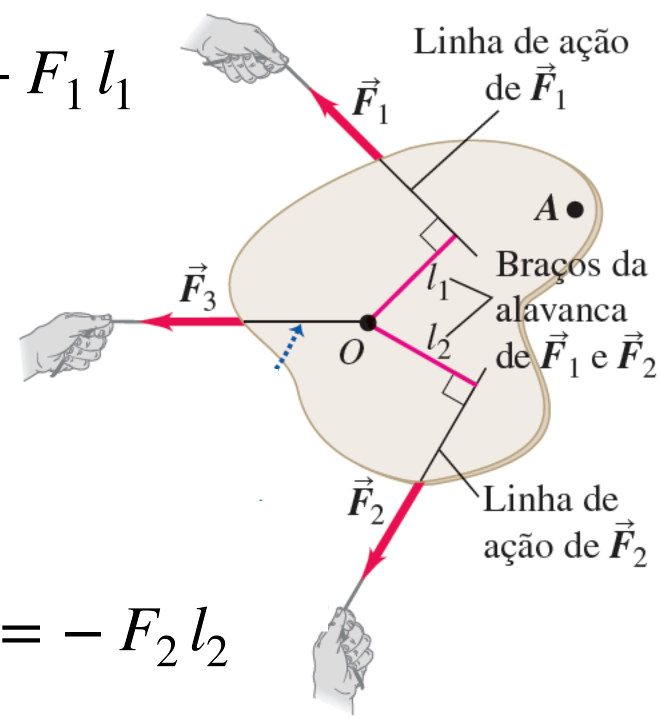
ATENÇÃO **Torque é sempre medido em torno de um ponto** Note que o torque é *sempre* definido em relação a um ponto específico. Se deslocarmos a posição desse ponto, o torque de cada força também pode mudar. Por exemplo, o torque da força $\vec{F}_3$ na Figura 10.2 é igual a zero em relação ao ponto O, mas *não* é zero em torno de A. Quando descrevemos o torque de uma certa força, não é suficiente falar "o torque da força $\vec{F}$"; devemos falar "o torque da força $\vec{F}$ em relação ao ponto X" ou "o torque de $\vec{F}$ em torno de X".

Definições de torque

- **A força $\vec{F}_1$ tende a causar uma rotação em torno de O no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, enquanto $\vec{F}_2$ tende a produzir uma rotação no mesmo sentido dos ponteiros do relógio**

- **Para distinguirmos entre essas duas possibilidades, escolheremos um sentido positivo para a rotação**
  - *Torque positivo é o que produz rotação no sentido anti-horário*
  - *Torque negativo o que produz rotação no sentido horário*

$$\tau_1 = +F_1 l_1$$



$$\tau_2 = -F_2 l_2$$

O torque como um vetor

- **A figura abaixo mostra uma força aplicada em um ponto P, definido pelo vetor posição em relação a um ponto escolhido O**

- **O torque dessa força é:**

Módulo de torque devido à força $\vec{F}$ relativa ao ponto O

Braço da alavanca de $\vec{F}$

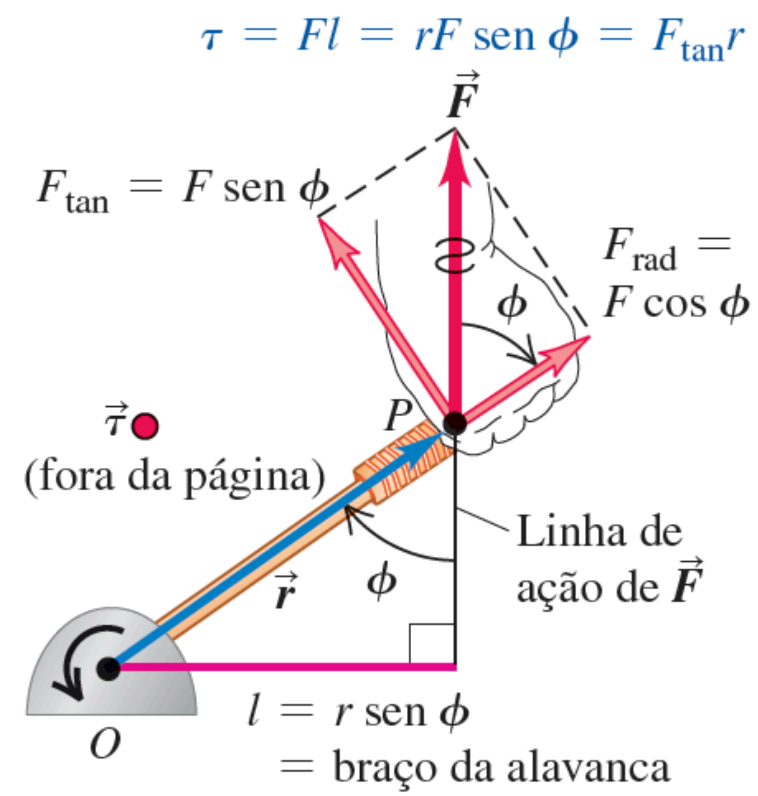
Módulo de $\vec{r}$ (vetor de O até onde $\vec{F}$ atua)

$$\tau = Fl = rF\,\text{sen}\,\phi = F_{\text{tan}}r$$

Módulo de $\vec{F}$

Ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$

Componente tangencial de $\vec{F}$



O torque como um vetor

- **A figura abaixo mostra uma força aplicada em um ponto P, definido pelo vetor posição em relação a um ponto escolhido O**

- **O torque dessa força é:**

Módulo de torque devido à força $\vec{F}$ relativa ao ponto O

Braço da alavanca de $\vec{F}$

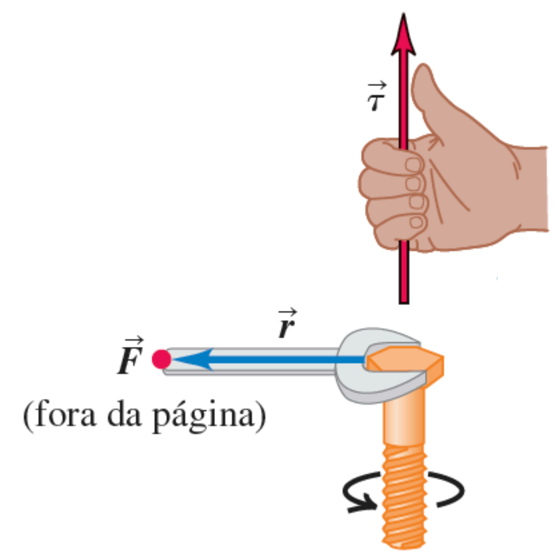
Módulo de $\vec{r}$ (vetor de O até onde $\vec{F}$ atua)

$$\tau = Fl = rF \operatorname{sen}\phi = F_{\tan} r$$

Módulo de $\vec{F}$

Ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$

Componente tangencial de $\vec{F}$



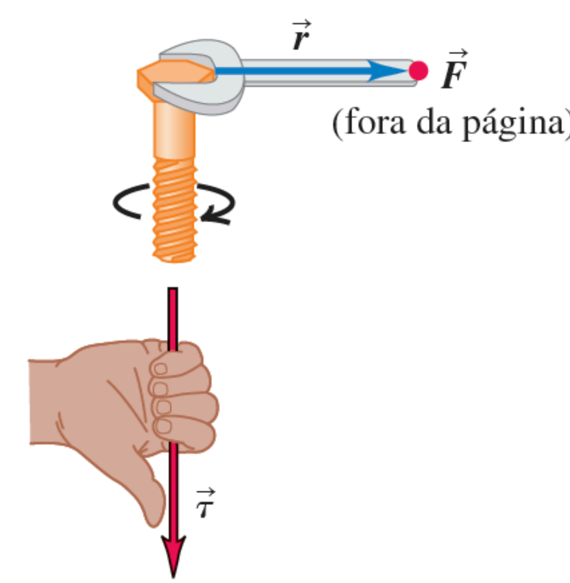
- **Em notação vetorial:**

Vetor torque devido à força $\vec{F}$ relativa ao ponto O

Vetor desde O até onde $\vec{F}$ atua

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Força $\vec{F}$

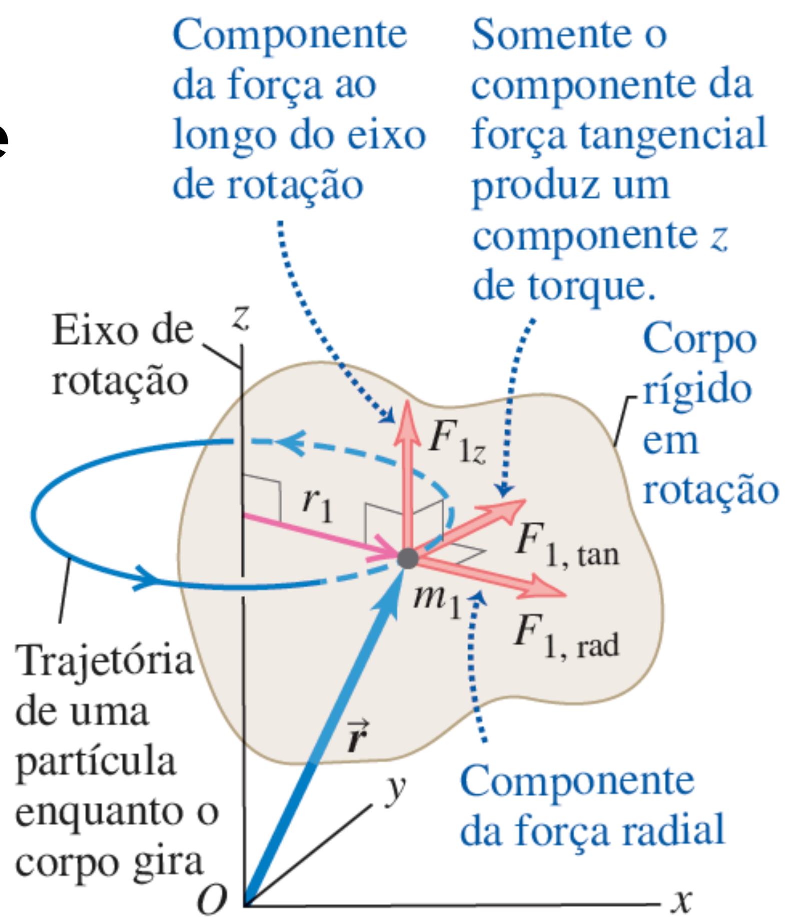


Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Torque
- **Torque e aceleração angular**
- Rotação em torno de um eixo móvel
- Exercícios de Fixação

Aceleração angular causada por um torque

- **Considere um corpo rígido constituído por um grande número de partículas**
- **Escolhemos para o eixo da rotação o eixo Oz**
  - *A primeira partícula possui massa* m_1 *e está a uma distância* r_1 *desse eixo*
- **A força resultante $\vec{\mathbf{F}}_1$ atua sobre essa partícula possui um componente $F_{1,rad}$, um componente $F_{1,tan}$ tangente e um componente $F_{1,z}$ ao longo de eixo de rotação**



- **A segunda lei de Newton para $F_{1,tan}$ fornece**

$$F_{1,tan} = m_1\, a_{1,tan}$$

- **Expressando $a_{1,tan} = r_1\, \alpha_{1,z}$ temos que**

$$\tau_{1,z} = F_{1,tan}\, r_1 = m_1\, r_1^2\, \alpha_{1,z} = I_1\, \alpha_{1,z}$$

Aceleração angular causada por um torque

- **Somando as contribuições de todas as partículas, e lembrando que a aceleração de todas as partículas é mesma, temos que**

$$\Sigma\ \tau_{i,z} = \Sigma\ \left(m_i r_i^2\right) \alpha_z$$

- **Dessa forma, temos que**

Forma análoga da segunda lei de Newton para a rotação de um corpo rígido:

Torque resultante sobre um corpo rígido em torno do eixo z

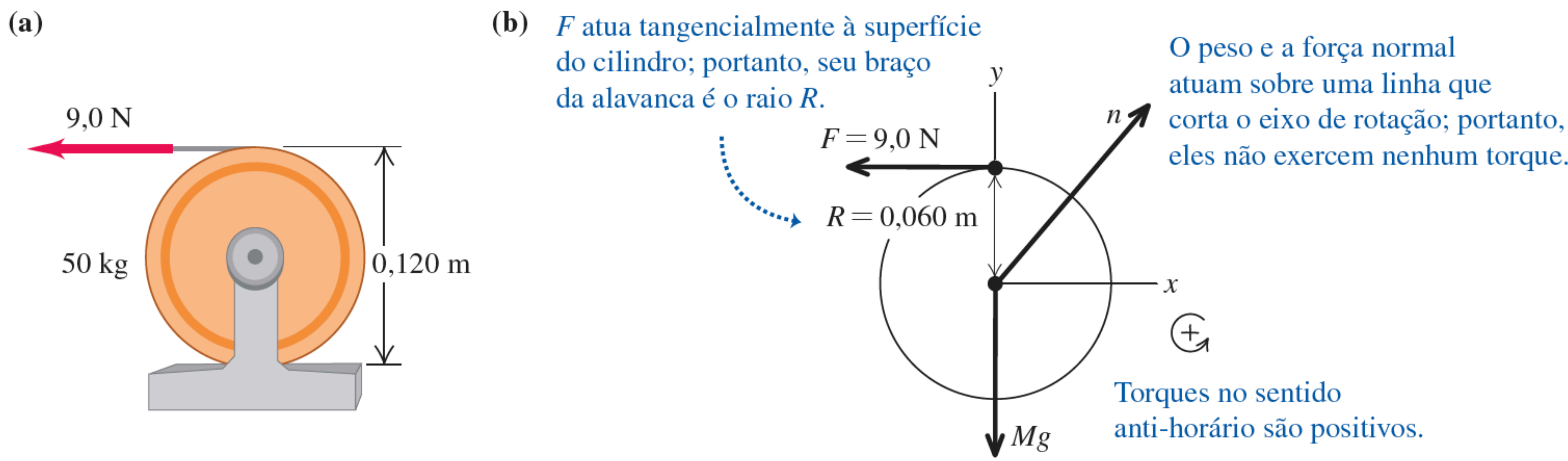
$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

Momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo z

Aceleração angular do corpo rígido em torno do eixo z

Exemplo: desenrolando um cabo (I) - continuação da aula anterior

- **Qual é a aceleração do cabo?**



$$\tau_z = F\,R$$

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{F\,R}{I} = \frac{F\,R}{M\,R^2/2} = \frac{2\,F}{M\,R} = \frac{2(9{,}0\,N)}{(50\,kg)(0{,}060\,m)} = 6{,}0\,rad/s^2$$

$$a_{tan} = R\,\alpha_z = (0{,}060\,m)(6{,}0\,rad/s^2) = 0{,}36\,m/s^2$$

Exemplo: desenrolando um cabo (II) - continuação da aula anterior

- **Quais são a aceleração do bloco em queda e a tensão no cabo?**
  - *Para o bloco, a segunda lei de Newton é*

$$\Sigma\, F_y = m\, g + (-T) = m\, a_y$$

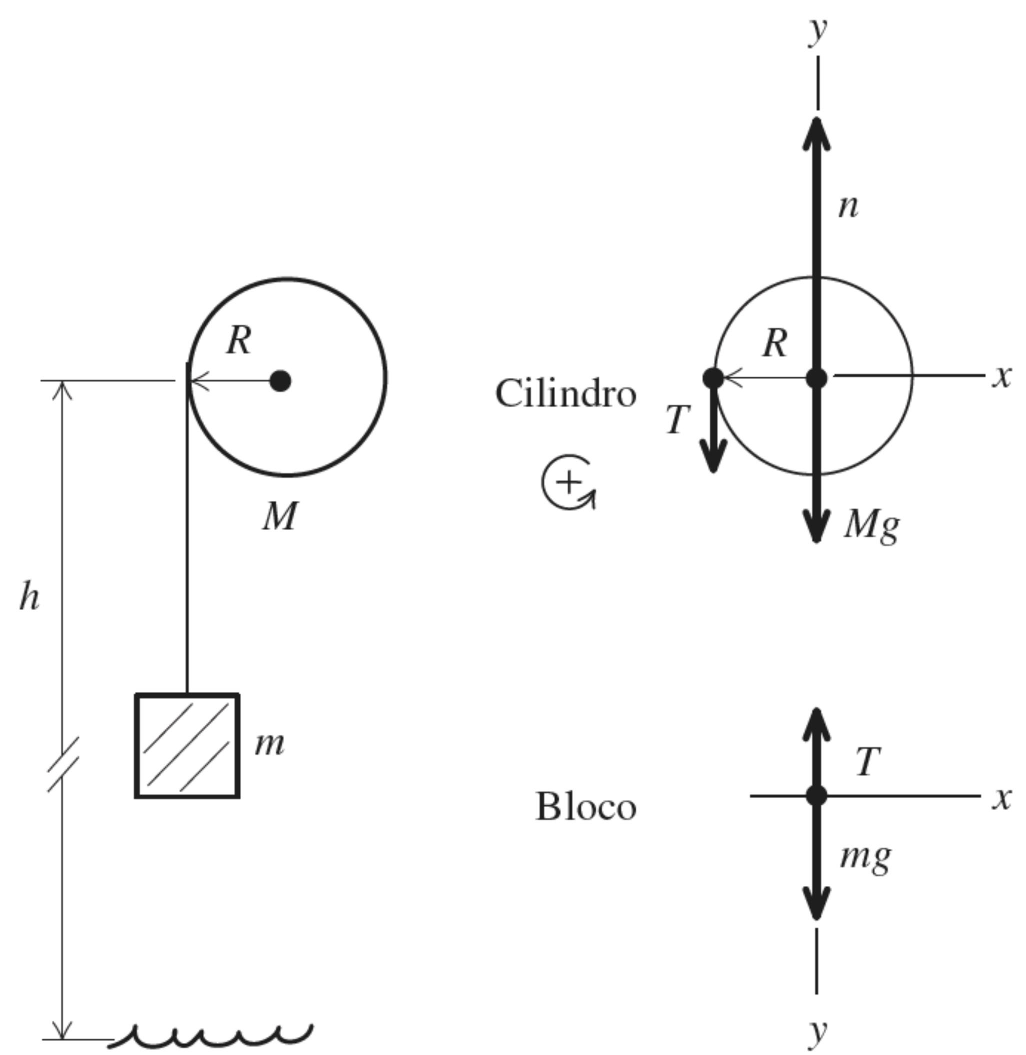
$$\Sigma\, \tau_z = T\, R = I\, \alpha_z = \frac{1}{2} M\, R^2\, \alpha_z$$

  - Como $a_y = a_{tan} = R\, \alpha_z$

$$T = \frac{1}{2} M\, a_y$$

$$m\, g - \frac{M\, a_y}{2} = m\, a_y \quad \rightarrow \quad a_y = \frac{g}{1 + M/2\, m}$$

$$T = m\, g - m\, a_y = \frac{m\, g}{1 + 2\, m/M}$$



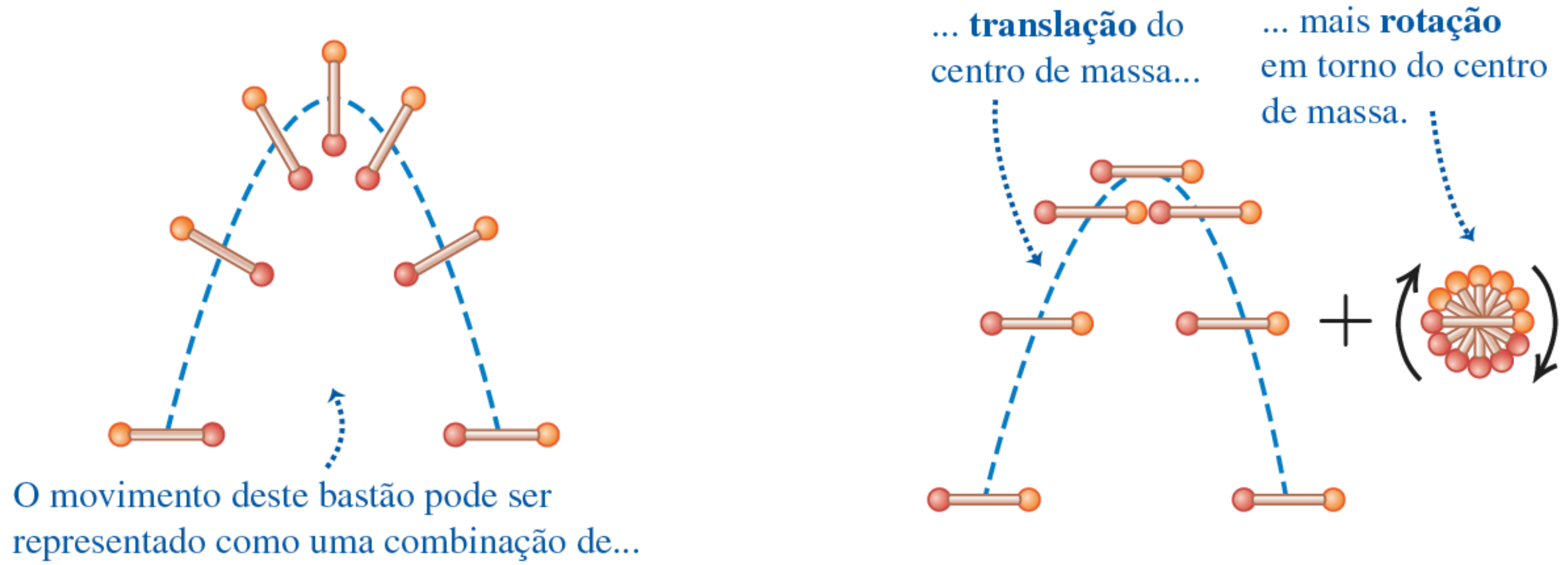
Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Torque
- Torque e aceleração angular
- **Rotação em torno de um eixo móvel**
- Exercícios de Fixação

Movimentos combinados de rotação e translação

- **Podemos estender nossa análise da dinâmica do movimento de rotação para casos em que o eixo de rotação se move**
  - *Quando isso acontece, dizemos que o corpo sofre um movimento combinado de rotação e translação*

- **A chave para compreender tais situações é a seguinte: todo movimento possível de um corpo rígido pode ser representado como uma combinação do movimento de translação do centro de massa e de uma rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa**



Energia cinética em movimentos combinados de rotação e translação

- **Está além do escopo deste curso demonstrar que todo movimento de um corpo rígido sempre pode ser dividido em um movimento de translação do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa**

- **Porém, podemos demonstrar que isso é verdade para a energia cinética de um corpo rígido que possui movimento combinado de translação e rotação. Neste caso, a energia cinética é a soma de duas partes:**

Energia cinética de um corpo rígido com translação e rotação

$$K = \overbrace{\tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^{2}}^{\text{Energia cinética de } \textit{translação} \text{ do centro de massa (cm)}} + \overbrace{\tfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^{2}}^{\text{Energia cinética de } \textit{rotação} \text{ em torno do eixo passando pelo cm}}$$

Massa do corpo

Velocidade do cm

Momento de inércia do corpo em torno do eixo passando pelo cm

Velocidade angular do corpo

Demonstração da decomposição da energia cinética em seus componentes associados à rotação e translação do corpo

- **Considere uma partícula típica com massa m_i, conforme mostra a abaixo**
  - *A velocidade dessa partícula é*

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}'$$

  - *Sua energia cinética, portanto, é*

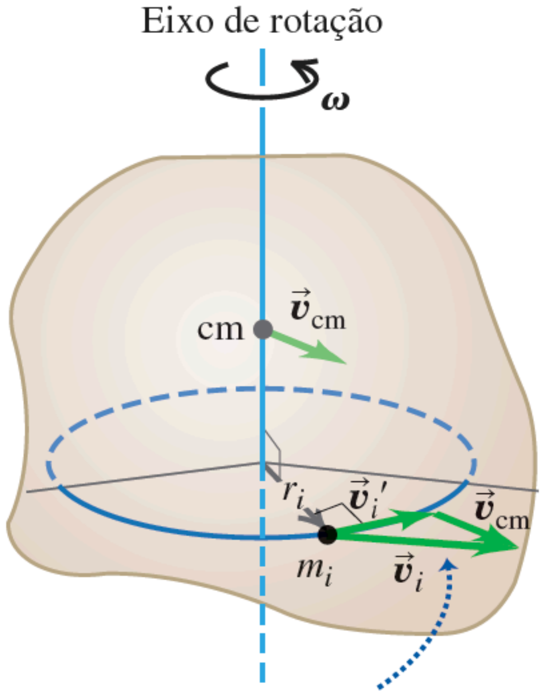
$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}\right) = \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}'\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}'\right)$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} + 2\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}' + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}' \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}'\right)$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \left(v_{cm}^2 + 2\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}' + v_i'^2\right)$$

$$K = \Sigma\, K_i = \frac{1}{2} \left(\Sigma\, m_i\right) v_{cm}^2 + \cancel{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{cm}} \cdot \left(\Sigma\, m_i \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}'\right)} + \left(\Sigma\, \frac{1}{2} m_i v_i'^2\right)$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$$



A velocidade $\vec{v}_i$ de uma partícula de um corpo rígido em rotação e translação = (velocidade $\vec{v}_{cm}$ do centro de massa) + (velocidade da partícula $\vec{v}_i'$ em relação ao centro de massa)

Rolamento sem deslizamento

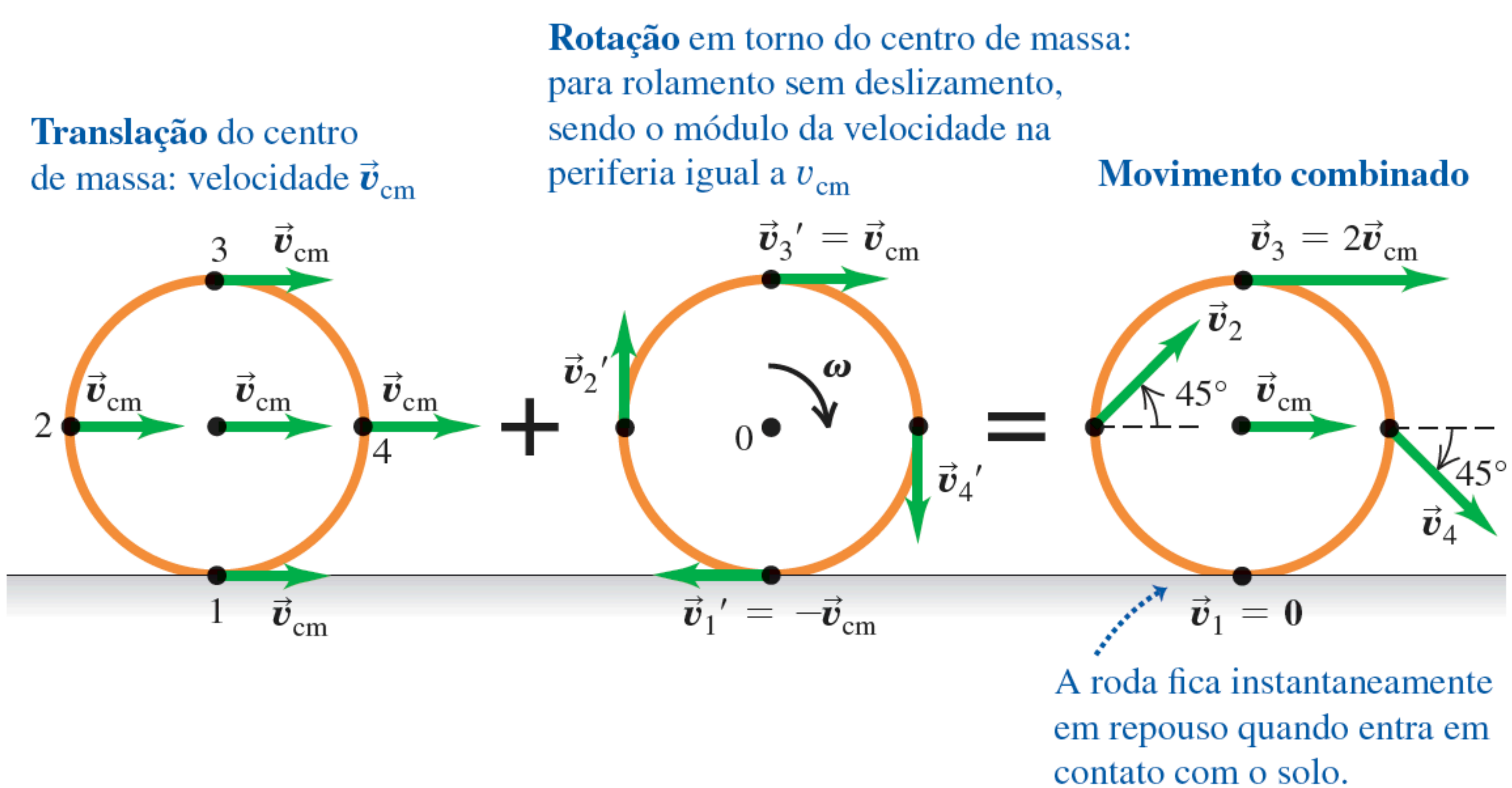
- **Um caso importante do movimento combinado de rotação e translação é o rolamento sem deslizamento**

- **Para isso, o ponto da roda que está em contato com a superfície deve permanecer instantaneamente em repouso, de modo que ele não escorregue. Logo,**

Condição para o rolamento sem deslizamento:

$$v_{cm} = R\omega$$

Velocidade do centro de massa da roda (v_{cm}); Raio da roda (R); Velocidade angular da roda (ω)



Exemplo: velocidade de um ioiô

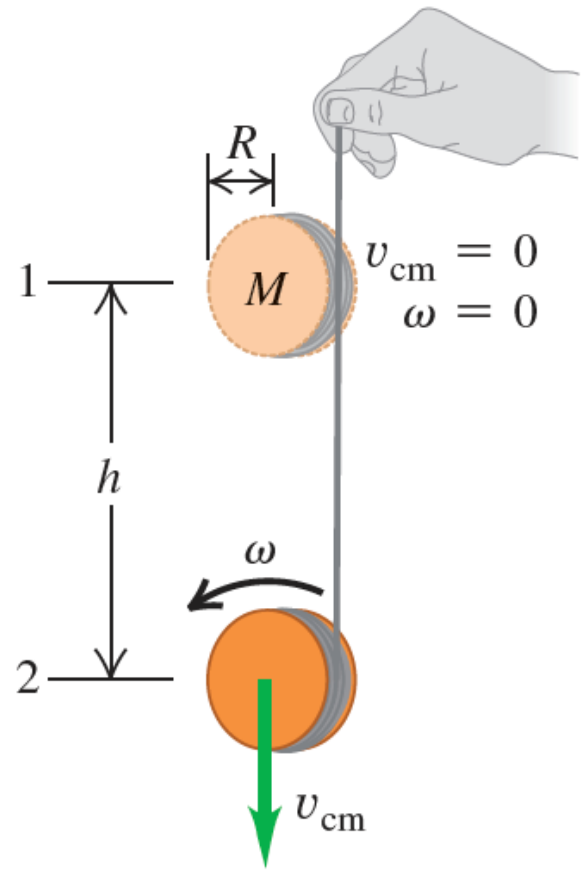
- **Um ioiô é feito enrolando-se um fio diversas vezes em torno de um cilindro de massa M e raio R. Você mantém a extremidade do fio presa enquanto o cilindro é liberado do repouso. O fio se desenrola, mas não desliza nem se dilata à medida que o cilindro cai e gira. Use considerações de energia para achar a velocidade do centro de massa do cilindro depois que ele caiu uma distância h**

$$K_2 = \frac{1}{2}M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2 = \frac{1}{2}M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M R^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$K_2 = \frac{3}{4}M v_{cm}^2$$

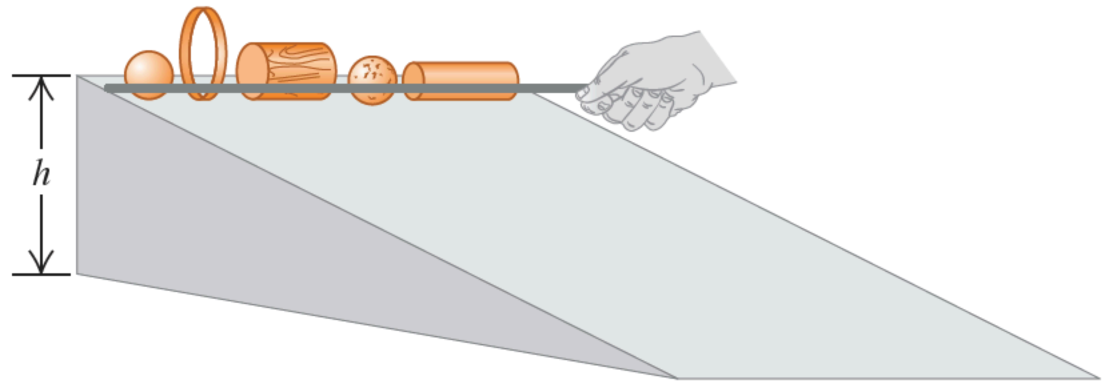
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + M g h = \frac{3}{4}M v_{cm}^2 + 0 \quad \rightarrow \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}g h}$$



Exemplo: competição entre corpos rolando

- **Em uma demonstração durante uma aula de física, um professor faz uma "competição" entre vários corpos rígidos, deixando-os rolar do alto de um plano inclinado. Qual corpo chega primeiro na base do plano inclinado?**



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + M\,g\,h = \frac{1}{2} M\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(cM\,R^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

$$M\,g\,h = \frac{1}{2}(1 + c)\,M\,v_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2g\,h}{1 + c}}$$

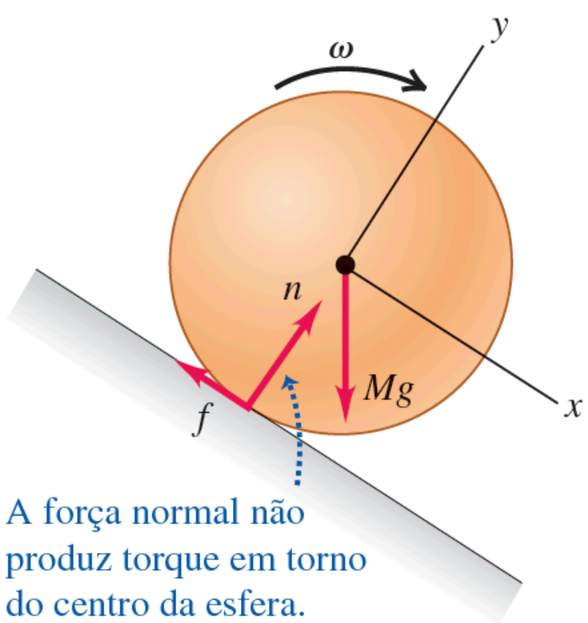
Corpos com baixo valor de c ganham dos corpos com grande valor de c porque gastam menos energia cinética na rotação, deixando uma parte maior para a energia cinética de translação

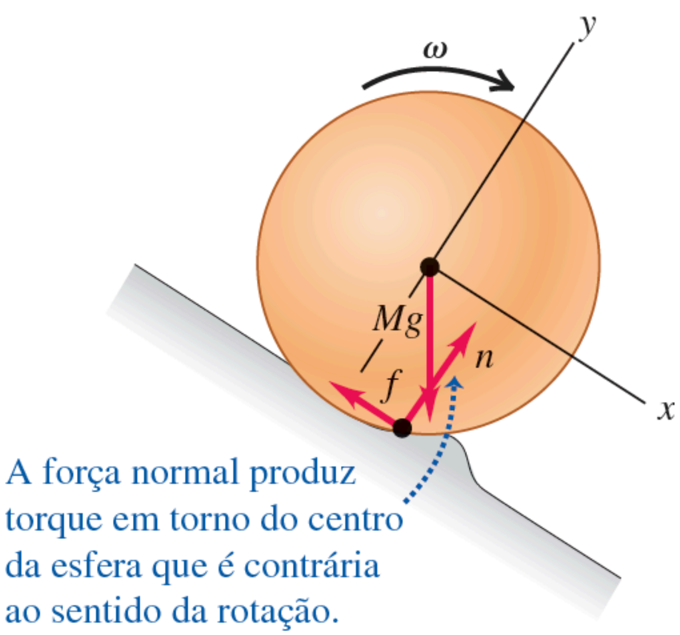
Ordem de chegada:
(1) qualquer esfera sólida (c = 2/5);
(2) qualquer cilindro sólido (c = 1/2);
(3) qualquer esfera oca e de parede fina (c = 2/3);
(4) qualquer cilindro oco de parede fina (c = 1)

Atrito de rolamento

- **Na figura da esquerda, a linha de ação da força normal passa pelo centro da esfera, de modo que seu torque é zero; como não existe nenhum atrito de deslizamento no ponto de contato, a força de atrito não realiza trabalho**

- **Na figura da direita, a força normal exerce um torque que se opõe à rotação. Além disso, existe um certo deslizamento da esfera sobre a superfície por causa da deformação, produzindo uma perda de energia mecânica**





Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos das seções 10.1, 10.2 e 10.3**
  - *Exercícios da seção 10.1: 10.3, 10.4, 10.5 e 10.7*
  - *Exercícios da seção 10.2: 10.8, 10.9, 10.11, 10.12, 10.14 e 10.16*
  - *Exercícios da seção 10.3: 10.20, 10.21, 10.23, 10.24 e 10.28*