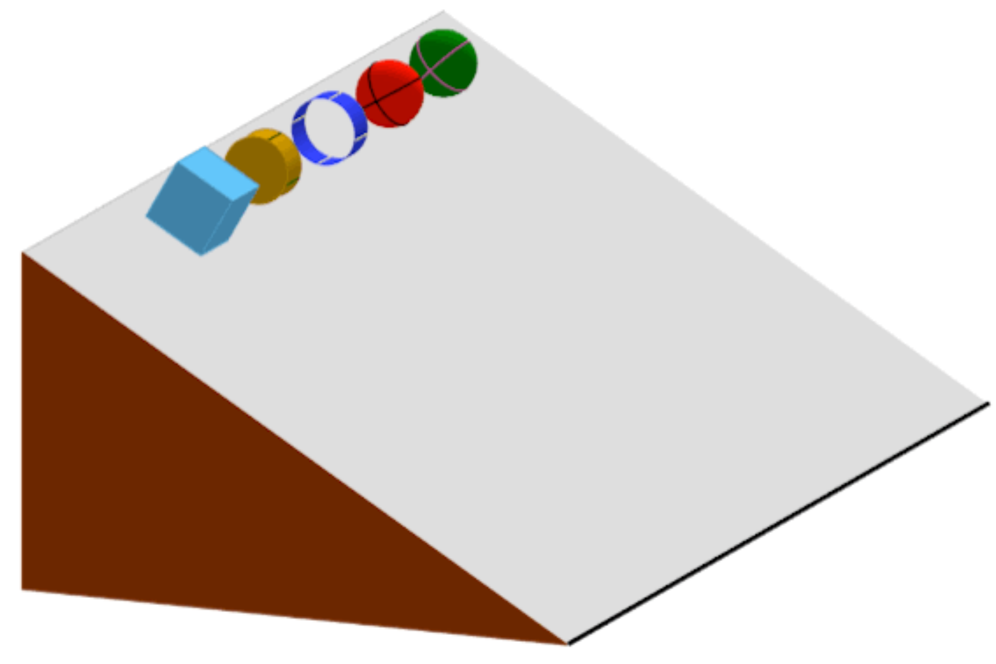
Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo



Corpos de mesma massa, mas com diferente distribuição espacial de massa, rolam diferentemente

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 23 de Novembro de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Energia no movimento de rotação**
- **Teorema dos eixos paralelos**
- **Cálculos do momento de inércia**
- **Exercícios de Fixação**

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Energia no movimento de rotação**
- Teorema dos eixos paralelos
- Cálculos do momento de inércia
- Exercícios de Fixação

A energia cinética de um corpo em rotação pode ser expresso em termos de uma nova grandeza: o momento de inércia

- **Um corpo rígido girando é constituído por massas em movimento e, portanto, possui energia cinética**

- **É possível expressar a energia cinética de um corpo em rotação em termos de sua velocidade angular e de uma grandeza chamada MOMENTO DE INÉRCIA**
  - *O momento de inércia depende da massa do corpo e de como a massa é distribuída espacialmente. Note que nenhum desses movimentos pode ser representado adequadamente como o movimento de um ponto*

A energia cinética associada à rotação de um corpo rígido pode ser escrita em termos de sua velocidade angular

- **Considere um corpo constituído por um grande número de partículas com massas m_1, m_2, m_3 … situadas a distâncias r_1, r_2, r_3 … do eixo de rotação**

- **As partículas são identificadas por um índice i: a massa da i-ésima partícula é m_i e sua distância perpendicular ao eixo de rotação é r_i**

- **Quando um corpo gira em torno de um eixo fixo, a velocidade v_i a i-ésima partícula é dada por $v_i = \omega_i r_i$, onde ω_i é a velocidade angular do corpo**

- **Partículas diferentes possuem valores diferentes de r_i, porém ω_i possui sempre o mesmo valor para todas (senão o corpo não seria rígido). Portanto, a energia cinética da i-ésima partícula pode ser expressa por**

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

O momento de inércia depende da distribuição espacial de massa do corpo

- **A energia cinética total do corpo é a soma das energias cinéticas de todas as partículas que constituem o corpo**

$$K = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 + \ldots = \Sigma\, \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

- **Colocando em evidência o fator comum $\omega^2/2$, obtemos**

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\Sigma\, m_i r_i^2\right)\omega^2$$

- **A grandeza entre parênteses é designada por I e representa o MOMENTO DE INÉRCIA do corpo em relação a esse eixo de rotação:**

Momento de inércia de um corpo para determinado eixo de rotação

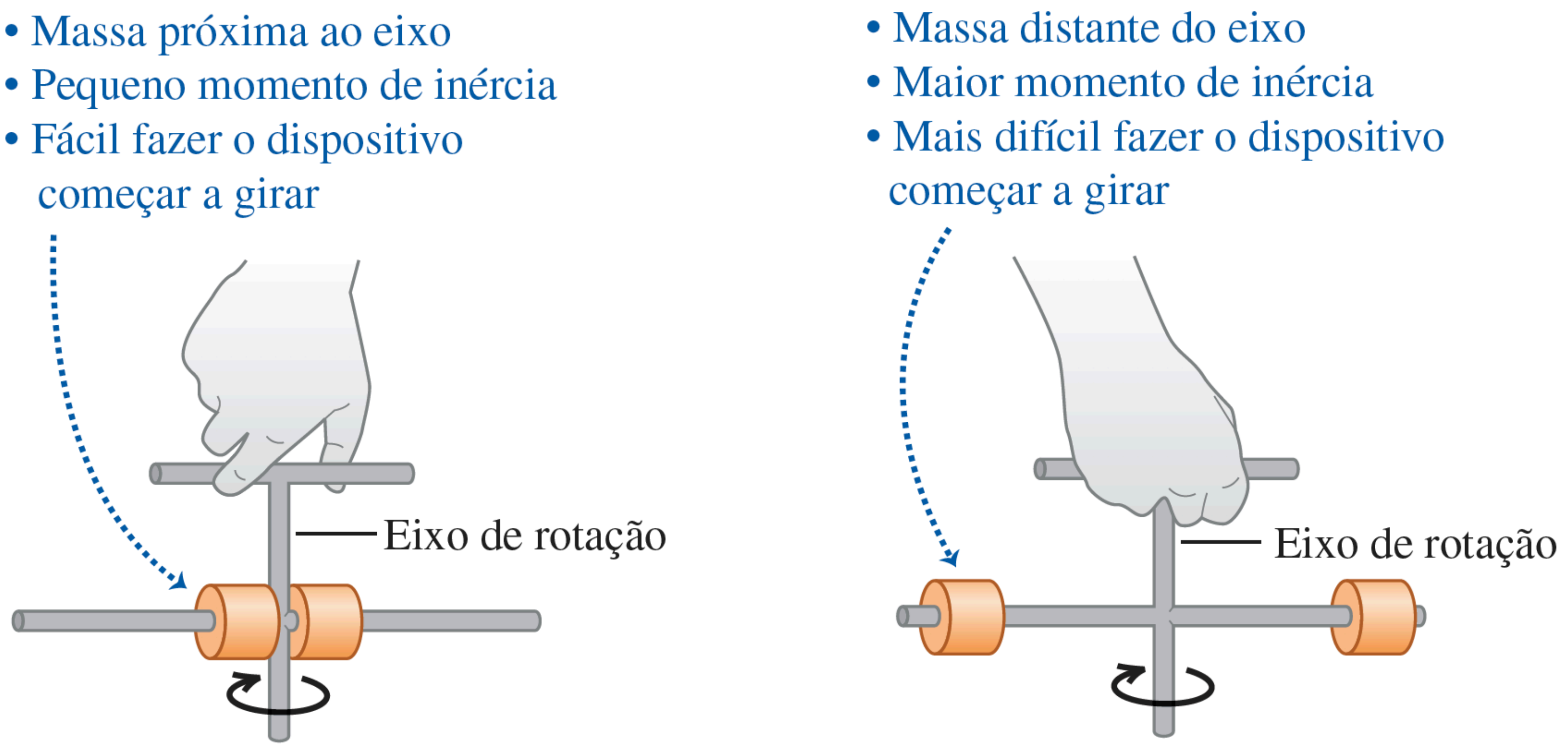
Massas das partículas que compõem o corpo

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2$$

Distâncias perpendiculares das partículas a partir do eixo de rotação

O momento de inércia é também chamado de inércia rotacional

- **Quanto mais afastadas as partículas estiverem do eixo de rotação, maior será o momento de inércia. Em um corpo rígido, as distâncias são todas constantes e I não depende de como o corpo está girando em torno de um dado eixo**
  - *A unidade SI do momento de inércia é quilograma vezes metro² (kg · m²)*
  - *Quanto maior for o momento de inércia, mais difícil será fazê-lo girar a partir do repouso e mais difícil será fazê-lo parar quando estiver girando*
  - *O momento de inércia também é chamado de INÉRCIA ROTACIONAL*



A energia cinética de um corpo em rotação é expressa em termos de sua velocidade angular e de seu momento de inércia

- **Portanto, a energia cinética de um corpo é dada por**

Energia cinética de rotação de um corpo rígido girando em torno de um eixo

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Momento de inércia do corpo para um dado eixo de rotação

Velocidade angular do corpo

- **A energia cinética acima não é uma nova forma de energia. Ela é a soma das energias cinéticas das partículas individuais que constituem o corpo rígido em rotação**
  - *Note que ω deve ser medida em radianos por segundo, e não em rotações por segundo ou em graus por segundo*

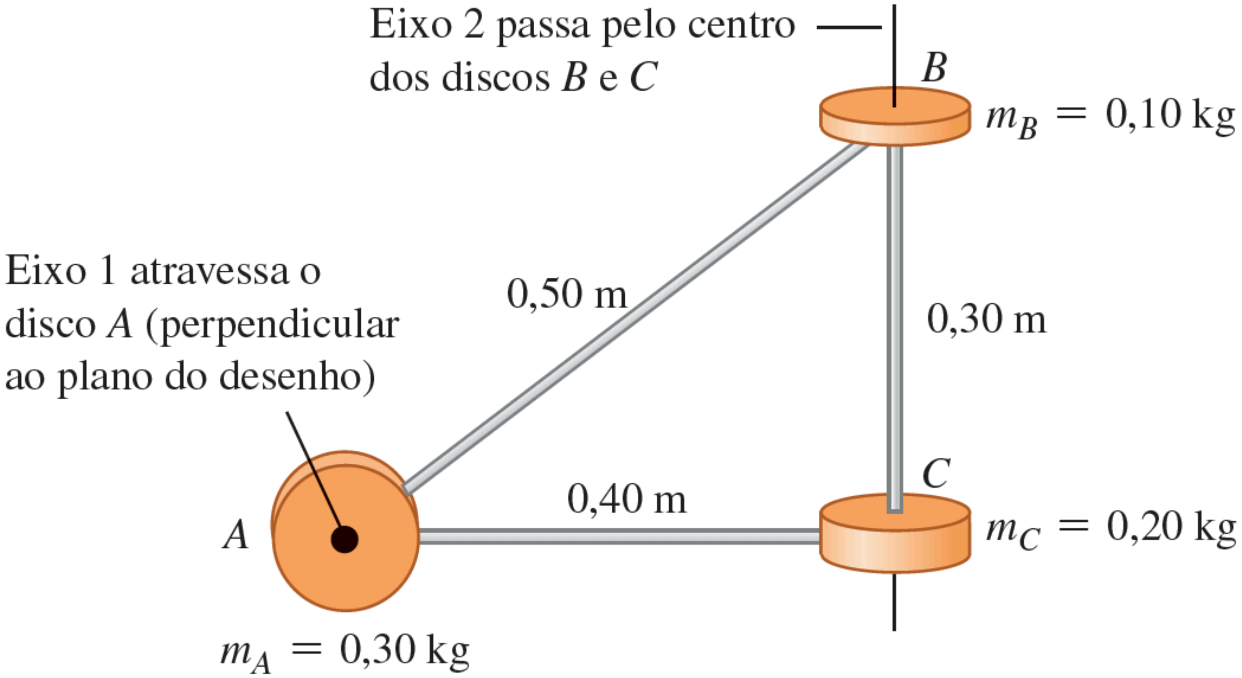
Exemplo: momentos de inércia em relação a diferentes eixos de rotação

- **A peça abaixo consiste em três discos ligados por suportes leves. (a) Qual é o momento de inércia desse corpo em relação a um eixo 1 que passa pelo centro do disco A, perpendicular ao plano do desenho?**

$$I_1 = \Sigma\, m_i r_i^2$$

$$I_1 = (0{,}10\,kg)(0{,}50\,m)^2 + (0{,}20\,kg)(0{,}40\,m)^2$$

$$I_1 = 0{,}057\,kg \cdot m^2$$



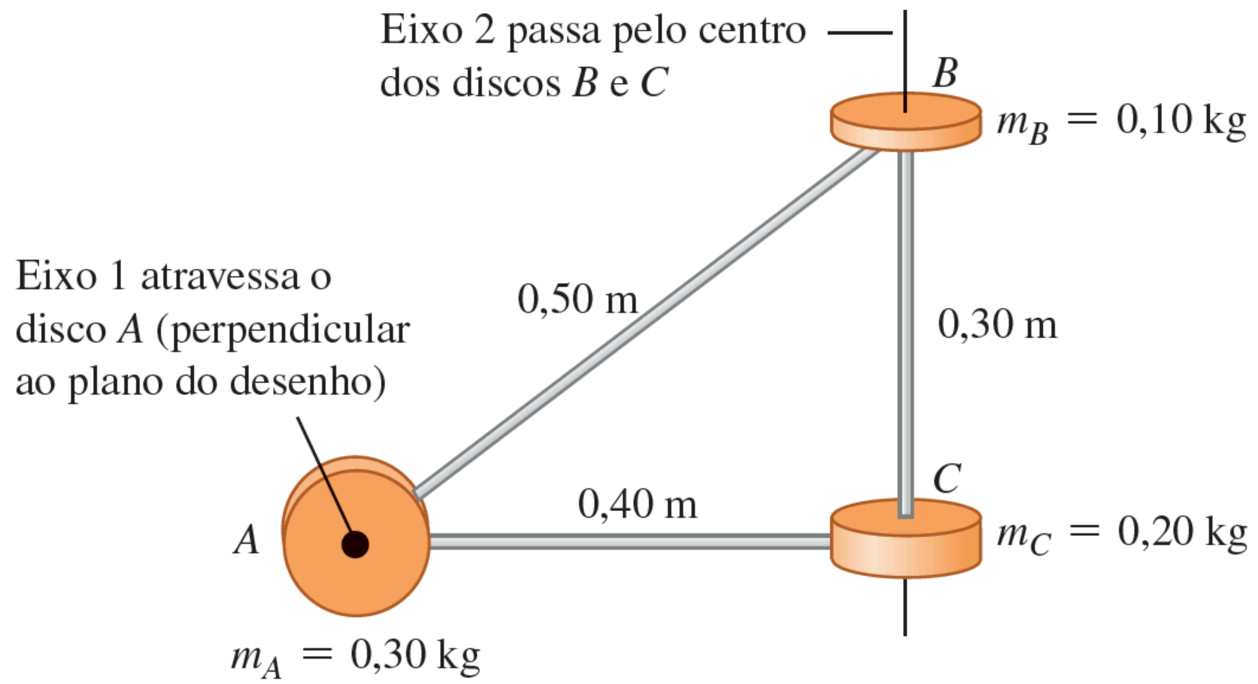
Exemplo: momentos de inércia em relação a diferentes eixos de rotação

- **A peça abaixo consiste em três discos ligados por suportes leves. (b) Qual é o momento de inércia em torno de um eixo 2 que passa pelos centros dos discos B e C ?**

$$I_2 = \Sigma\, m_i r_i^2$$

$$I_2 = (0{,}30\,kg)(0{,}40\,m)^2$$

$$I_2 = 0{,}048\,kg \cdot m^2$$

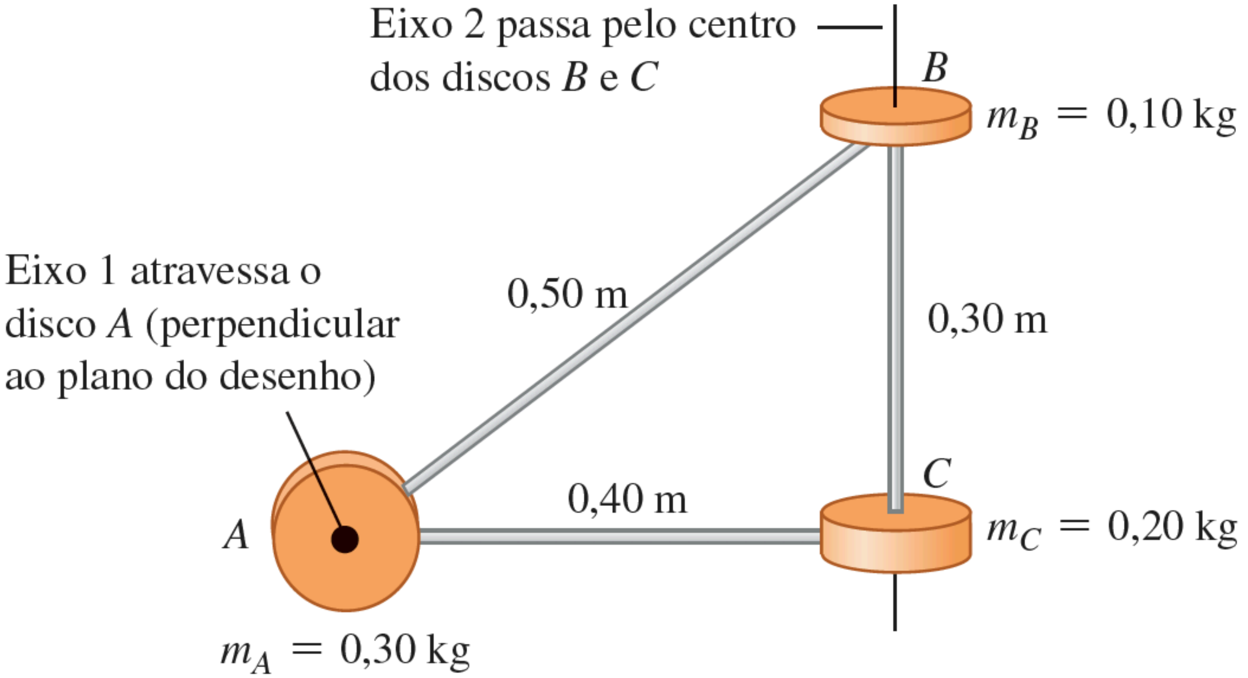


Exemplo: momentos de inércia em relação a diferentes eixos de rotação

- **A peça abaixo consiste em três discos ligados por suportes leves. (c) Qual é a energia cinética do corpo se ele gira em torno do eixo 1 com velocidade angular ω = 4,0 rad/s?**

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2 = \frac{1}{2}(0{,}057\, kg \cdot m^2)(4{,}0\, rad/s)^2$$

$$K_1 = 0{,}46\, J$$



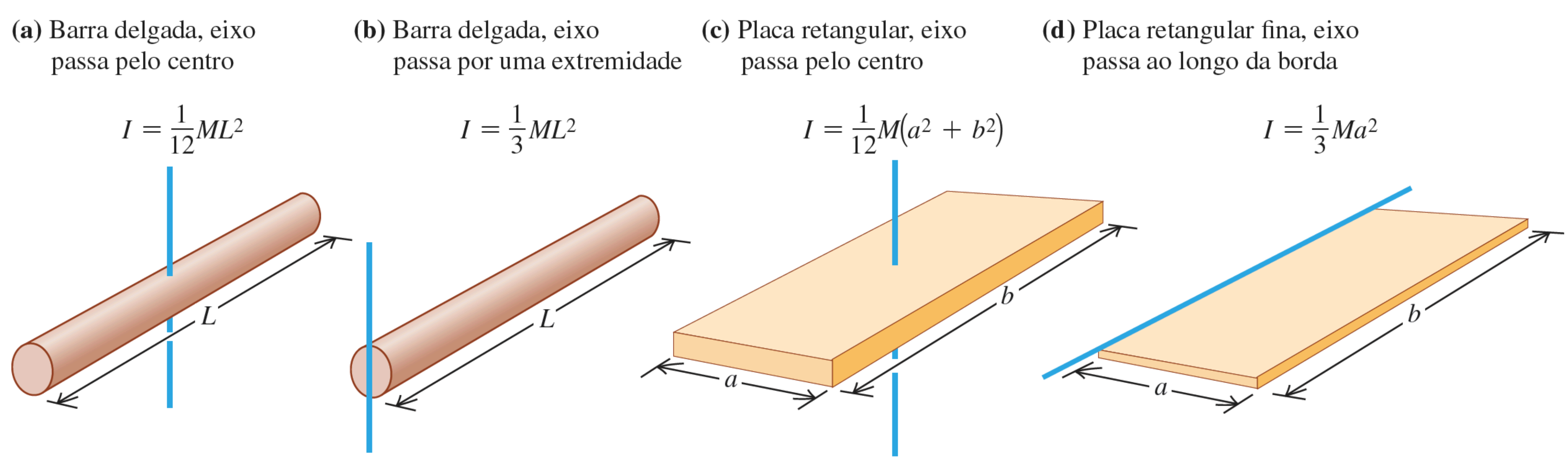
ATENÇÃO **O momento de inércia depende da escolha do eixo** O Exemplo 9.6 mostra que o momento de inércia de um corpo depende da localização e da orientação do eixo. Não é suficiente dizer "O momento de inércia de um corpo é 0,048 kg · m²". É necessário ser mais específico e dizer "O momento de inércia de um corpo *em relação ao eixo que passa por B e C* é 0,048 kg · m²".

O momento de inércia depende da distribuição espacial de massa do corpo

- **No exemplo anterior, representamos o corpo por um conjunto de massas puntiformes e avaliamos diretamente o somatório**

- **Quando o corpo possui uma distribuição contínua de matéria, como um cilindro maciço ou uma placa, a soma se transforma em uma integral**

- **Abaixo estão apresentamos os momentos de inércia de diversas formas familiares em termos da massa e das dimensões do corpo**



O momento de inércia depende da distribuição espacial de massa do corpo

- No exemplo anterior, representamos o corpo por um conjunto de massas puntiformes e avaliamos diretamente o somatório

- Quando o corpo possui uma distribuição contínua de matéria, como um cilindro maciço ou uma placa, a soma se transforma em uma integral

- Abaixo estão apresentamos os momentos de inércia de diversas formas familiares em termos da massa e das dimensões do corpo

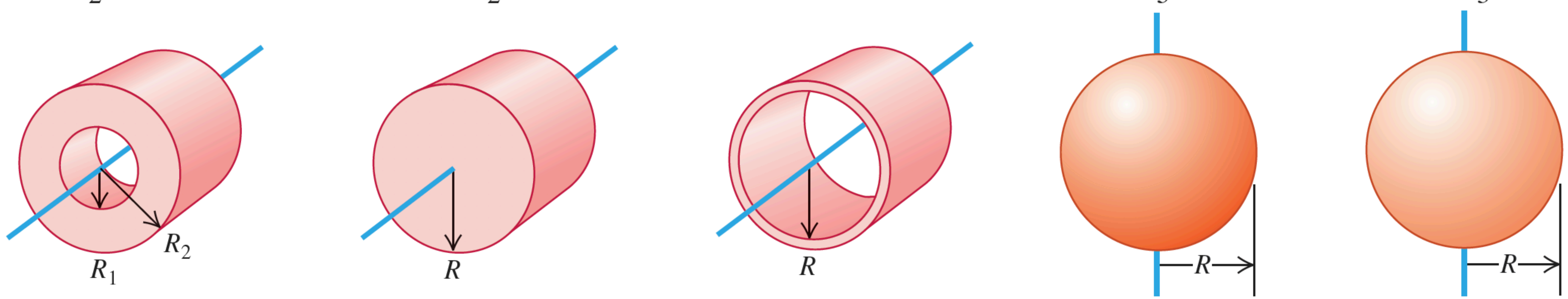
(e) Cilindro oco: $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

(f) Cilindro maciço: $I = \frac{1}{2}MR^2$

(g) Cilindro oco com paredes finas: $I = MR^2$

(h) Esfera sólida: $I = \frac{2}{5}MR^2$

(i) Esfera oca com paredes finas: $I = \frac{2}{3}MR^2$



O momento de inércia depende da distribuição espacial de massa do corpo

- **No exemplo anterior, representamos o corpo por um conjunto de massas puntiformes e avaliamos diretamente o somatório**

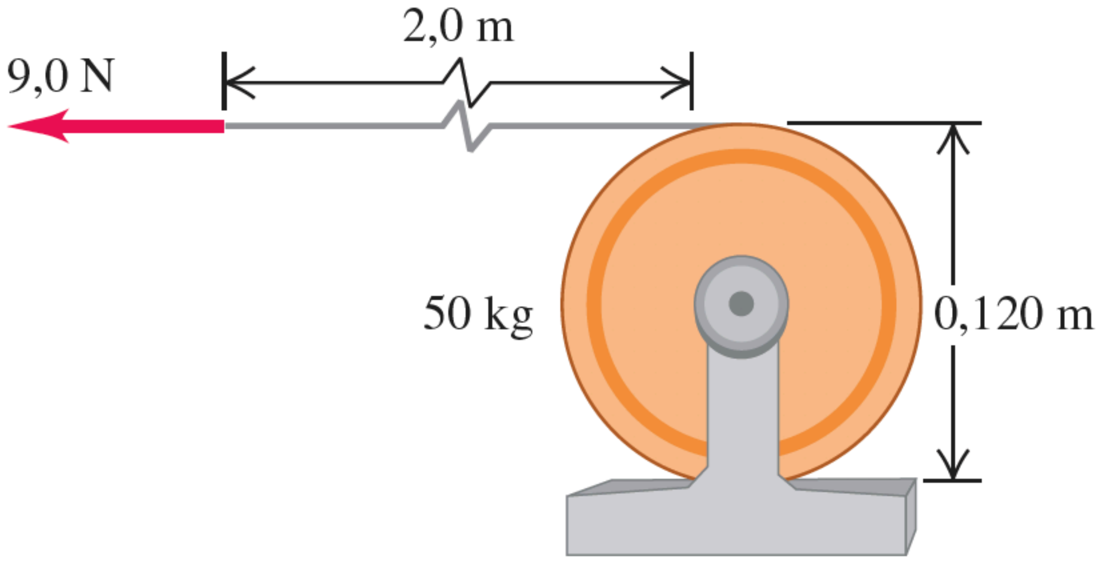
- **Quando o corpo possui uma distribuição contínua de matéria, como um cilindro maciço ou uma placa, a soma se transforma em uma integral**

- **Abaixo estão apresentamos os momentos de inércia de diversas formas familiares em termos da massa e das dimensões do corpo**

ATENÇÃO **Cálculo do momento de inércia** Podemos ser tentados a calcular o momento de inércia de um corpo supondo que toda a massa do corpo esteja concentrada em seu centro de massa e, a seguir, multiplicando a massa pelo quadrado da distância entre o centro de massa e o eixo de rotação, mas isso não funciona! Por exemplo, quando uma barra uniforme fina de comprimento L e massa M está pivotada em torno de um eixo perpendicular à barra passando pela sua extremidade, seu momento de inércia é dado por $I = ML^2/3$ [caso (b) da Tabela 9.2]. Se você imaginasse a massa da barra concentrada em seu centro, a uma distância $L/2$ do eixo, você obteria o resultado *errado* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Exemplo: desenrolando um cabo (I)

- **Um cabo leve, flexível e não deformável é enrolado diversas vezes em torno da periferia de um tambor cilíndrico maciço de 50 kg e diâmetro de 0,120 m, que pode girar em torno de um eixo estacionário horizontal mantido por mancais sem atrito. A extremidade livre do cabo é puxada com uma força constante de módulo igual a 9,0 N, deslocando-se por uma distância de 2,0 m. Ele se desenrola sem deslizar e faz o cilindro girar. O cilindro está inicialmente em repouso. Calcule sua velocidade angular e a velocidade linear final do cabo.**



$$W_{outra} = F\,d = (9{,}0\,N)(2{,}0\,m) = 18\,J$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50\,kg)(0{,}060\,m)^2 = 0{,}090\,kg \cdot m^2$$

$$\cancel{K_1} + \cancel{U_1} + W_{outra} = K_2 + \cancel{U_2} \quad \rightarrow \quad W_{outra} = \frac{1}{2}I\,\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{outra}}{I}} = \sqrt{\frac{2 \times 18}{0{,}090}} = 20\,rad/s$$

$$v = \omega\,R = (20\,rad/s)(0{,}060\,m) = 1{,}2\,m/s$$

Exemplo: desenrolando um cabo (II)

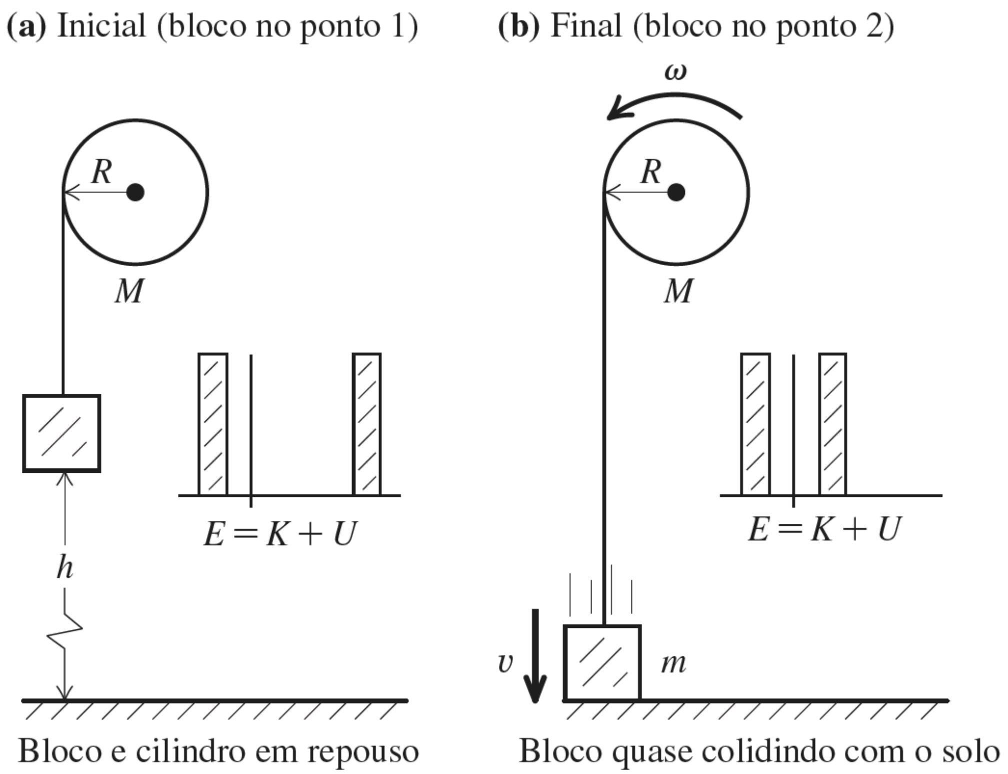
- **Enrolamos um cabo leve e flexível em torno de um cilindro maciço com massa M e raio R. O cilindro gira com atrito desprezável em torno de um eixo horizontal estacionário. Amarramos a extremidade livre do cabo a um objeto de massa m e liberamos o bloco a partir do repouso a uma distância h acima do solo. À medida que o bloco cai, o cabo se desenrola sem se esticar nem deslizar. Calcule a velocidade do bloco que cai e a velocidade angular do cilindro no instante em que o objeto atinge o solo.**

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + m\,g\,h = \frac{1}{2} m\,v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\left(\frac{v}{R}\right) + 0$$

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + M/2\,m}} \qquad \omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + M/2\,m}}$$



Energia potencial gravitacional de um corpo estendido

- **No exemplo anterior, o cabo possuía massa desprezável, de modo que ignoramos sua energia cinética e a energia potencial gravitacional associada ao cabo**
  - *Quando a massa não é desprezável, precisamos aprender a calcular a energia potencial gravitacional associada à um corpo de massa estendida*

- **Quando a aceleração da gravidade g é a mesma em todos os pontos do corpo, a energia potencial gravitacional é a mesma que a de uma partícula com massa total do corpo centralizada em seu centro de massa**

- **Então, para um corpo de massa total M, a energia potencial gravitacional U é simplesmente**

$$U = M\,g\,y_{cm}$$

Energia potencial gravitacional de um corpo estendido

- **Para demonstrar esse resultado, novamente consideramos o corpo como um conjunto de elementos de massa m_i. A energia potencial de um elemento de massa m_i é $U_i = m_i\, g\, y_i$ de modo que a energia potencial é dada por**

$$U = m_1\, g\, y_1 + m_2\, g\, y_2 + m_3\, g\, y_3 + \ldots = \left(m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + m_3\, y_3 + \ldots\right)\, g$$

- **Porém, temos que as coordenadas do centro de massa são dadas por**

$$m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + m_3\, y_3 + \ldots = \left(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\right) y_{cm} = M\, y_{cm}$$

- **De onde tiramos que**

$$U = M\, g\, y_{cm}$$

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Energia no movimento de rotação
- **Teorema dos eixos paralelos**
- Cálculos do momento de inércia
- Exercícios de Fixação

Um corpo rígido possui um número infinito de valores de momento de inércia

- **Um corpo rígido não possui um único momento de inércia. Existe um número infinito de momentos de inércia, porque existe um número infinito de eixos de rotação**

- **No entanto, existe uma relação simples, chamada TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS, entre o momento de inércia de um corpo em relação ao centro de massa do corpo e o momento de inércia em relação a outro eixo paralelo ao eixo original**

Teorema dos eixos paralelos:

momento de inércia de um corpo para um eixo de rotação em relação ao ponto P

$$I_P = I_{\mathrm{cm}} + Md^2$$

Massa do corpo

Distância entre dois eixos paralelos

Momento de inércia do corpo para um eixo paralelo em relação ao centro de massa

Demonstração do teorema dos eixos paralelos

- **Momento de inércia de uma fatia do corpo na direção z**

$$I_{cm} = \Sigma\, m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

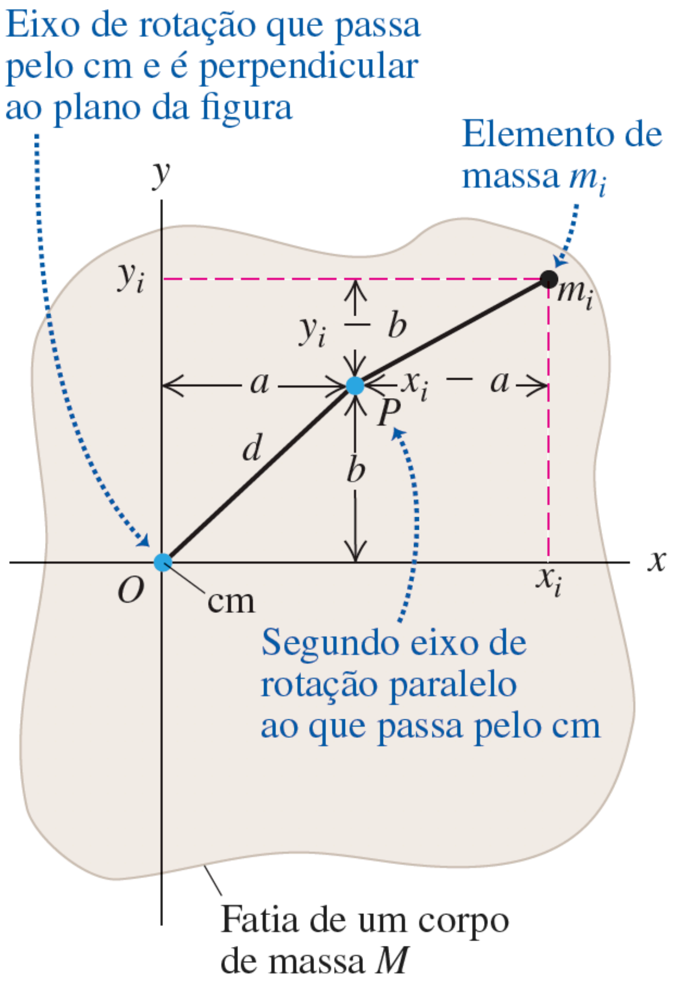
- **O momento de inércia da fatia em relação ao eixo que passa no ponto P é**

$$I_P = \Sigma\, m_i \left[\left(x_i - a\right)^2 + \left(y_i - b\right)^2\right]$$

- **Desenvolvendo os termos elevados ao quadrado e reagrupando-os, obtemos**

$$I_P = \Sigma\, m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) - \cancel{2a\Sigma\, m_i\, x_i} - \cancel{2b\Sigma\, m_i\, y_i} + \left(a^2 + b^2\right) \Sigma_i\, m_i$$

$$I_P = I_{cm} + M\, d^2$$



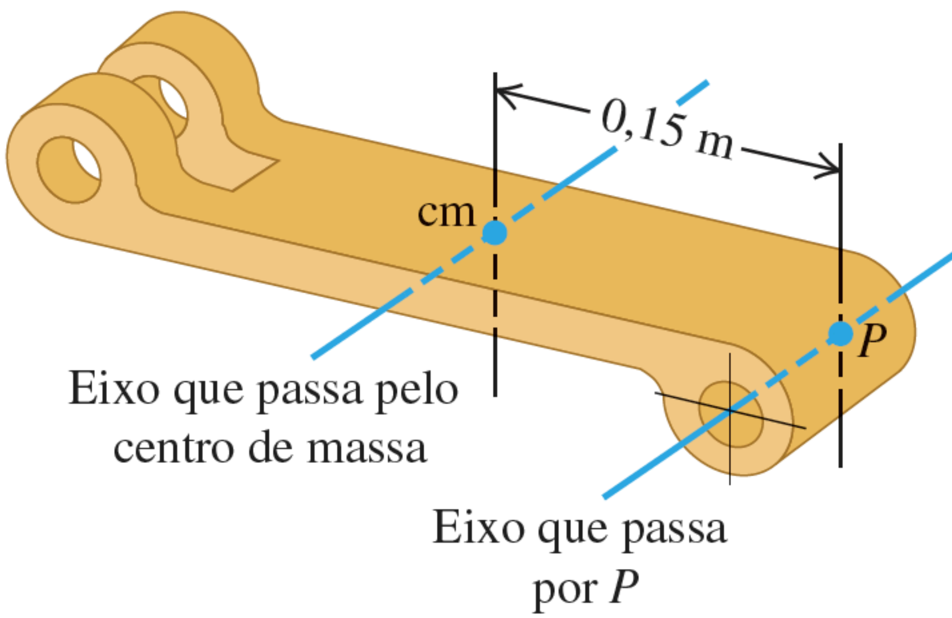
Exemplo: o uso do teorema dos eixos paralelos

- **Uma das peças de uma articulação mecânica possui massa igual a 3,6 kg. Medimos seu momento de inércia em relação a um eixo situado a uma distância de 0,15 m de seu centro de massa e encontramos um valor de 0,132 kg·m². Qual é o momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa?**

$$I_{cm} = I_P - M\,d^2$$

$$I_{cm} = 0{,}132\,kg \cdot m^2 - (3{,}6\,kg)\,(0{,}15\,m)^2$$

$$I_{cm} = 0{,}051\,kg \cdot m^2$$



Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Energia no movimento de rotação
- Teorema dos eixos paralelos
- **Cálculos do momento de inércia**
- Exercícios de Fixação

Momento de inércia de uma distribuição continua de massa

- **Uma distribuição contínua de massas - como um cilindro maciço ou uma esfera maciça - ele não pode ser representado por massas puntiformes. Neste caso, a soma das massas e distâncias que definem o momento de inércia se transforma em uma integral.**

$$I = \int r^2 dm$$

- **Para um objeto em três dimensões, geralmente é mais fácil escrever dm em termos de um elemento de volume dV e a densidade ρ do corpo. A densidade ou massa específica é dada por $\rho = dm/dV$, de modo que a equação acima pode ser escrita como**

$$I = \int r^2 \rho \, dv$$

- **Quando o corpo possui densidade uniforme, a constante ρ pode ser retirada da integral:**

$$I = \rho \int r^2 \, dv$$

Exemplo: cilindro oco ou maciço, girando em torno do eixo de simetria uso do teorema dos eixos paralelos

- **A figura abaixo mostra um cilindro oco com densidade de massa uniforme ρ e comprimento L, raio interno R_1 e raio externo R_2. Usando a integração, determine seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria do cilindro.**

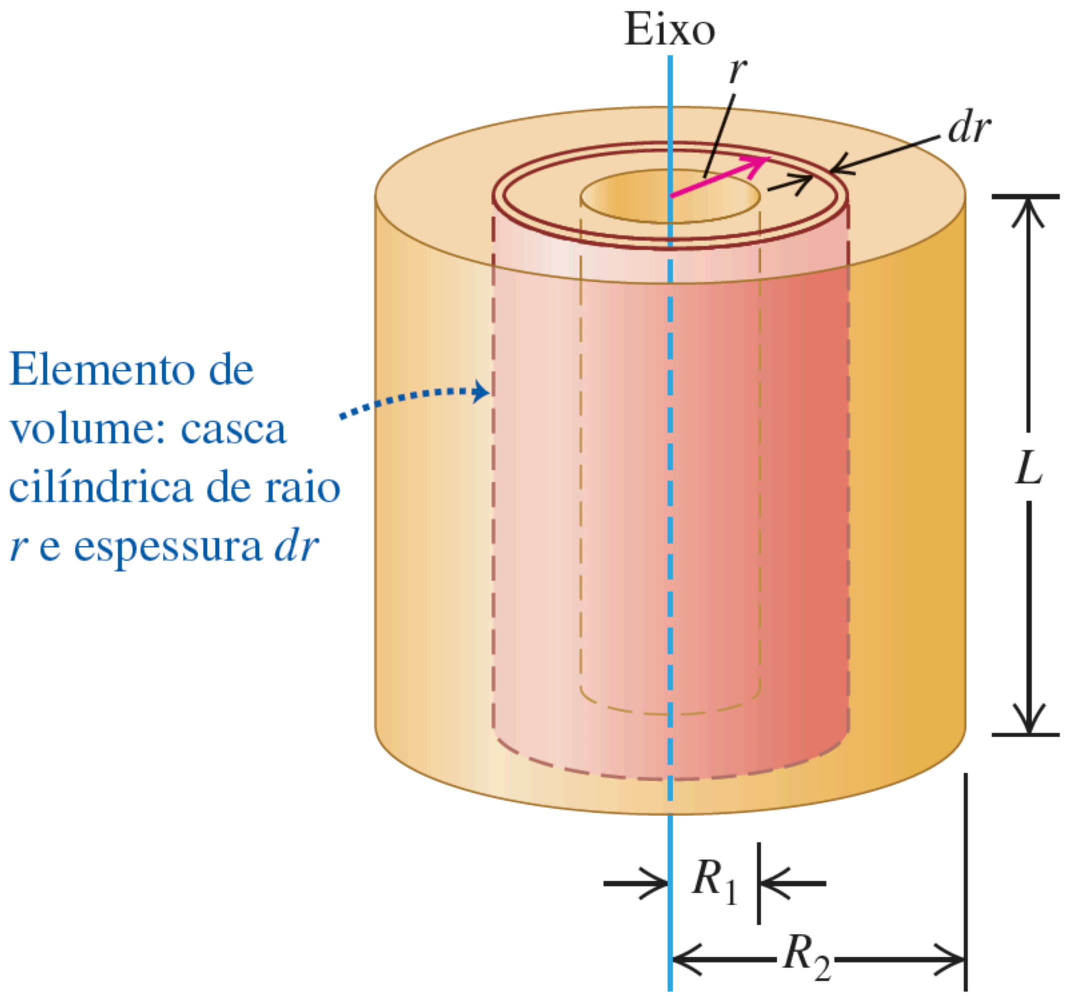
EXECUTAR: pela Equação 9.20, o momento de inércia é dado por

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L\,dr)$$

$$= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

[Na etapa anterior, usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.] Vamos expressar esse resultado em termos da massa total M do corpo, que é sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V. O volume do cilindro é



Exemplo: cilindro oco ou maciço, girando em torno do eixo de simetria uso do teorema dos eixos paralelos

- **A figura abaixo mostra um cilindro oco com densidade de massa uniforme ρ e comprimento L, raio interno R_1 e raio externo R_2. Usando a integração, determine seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria do cilindro.**

EXECUTAR: pela Equação 9.20, o momento de inércia é dado por

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L\,dr)$$

$$= 2\pi\rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = \frac{2\pi\rho L}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{\pi\rho L}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

[Na etapa anterior, usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.] Vamos expressar esse resultado em termos da massa total M do corpo, que é sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V. O volume do cilindro é

[Na etapa anterior, usamos a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.] Vamos expressar esse resultado em termos da massa total M do corpo, que é sua densidade ρ multiplicada pelo volume total V. O volume do cilindro é

$$V = \pi L({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

de modo que a massa total M é

$$M = \rho V = \pi L \rho({R_2}^2 - {R_1}^2)$$

Comparando com a expressão anterior para I, vemos que

$$I = \tfrac{1}{2}M({R_1}^2 + {R_2}^2)$$

Exemplo: esfera homogênea com raio r, eixo passando pelo centro

- **Determine o momento de inércia de uma esfera maciça e uniforme com densidade ρ (como uma bola de bilhar) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.**

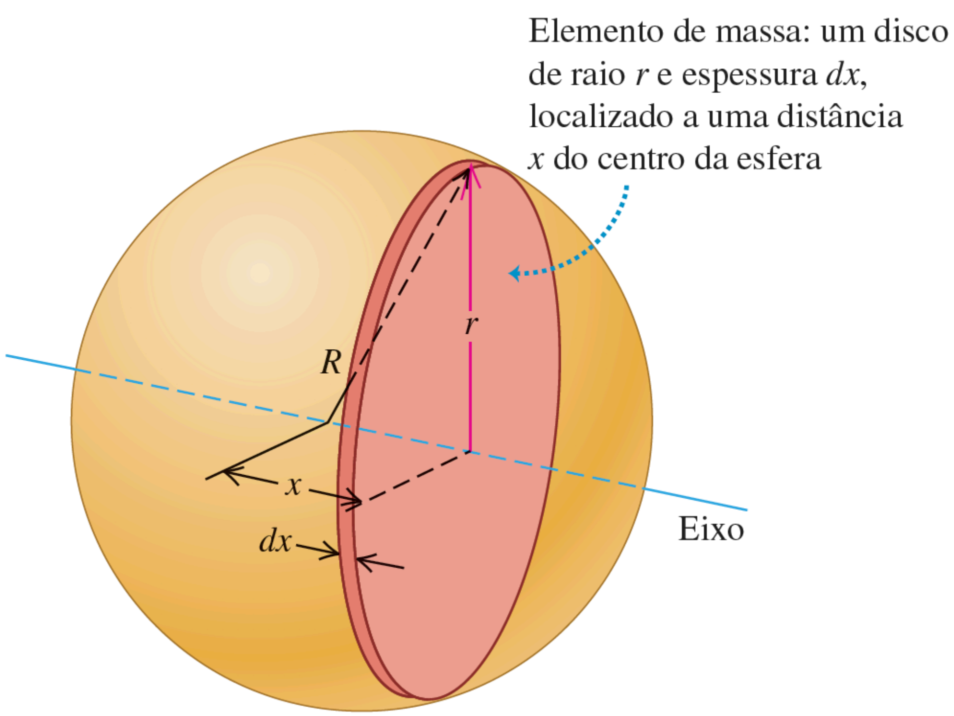
IDENTIFICAR E PREPARAR: dividimos a esfera em discos finos de espessura dx (**Figura 9.24**), cujos momentos de inércia conhecemos pela Tabela 9.2, caso (f). Vamos fazer a integração deles para calcular o momento de inércia total.

EXECUTAR: o raio e, portanto, o volume e a massa de um disco, dependem de sua distância x do centro da esfera. O raio r do disco indicado na Figura 9.24 é

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Seu volume é

$$dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2)dx$$



Exemplo: esfera homogênea com raio r, eixo passando pelo centro

- **Determine o momento de inércia de uma esfera maciça e uniforme com densidade ρ (como uma bola de bilhar) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.**

e sua massa é

$$dm = \rho\, dV = \pi\rho(R^2 - x^2)dx$$

Pela Tabela 9.2, caso (f), o momento de inércia de um disco de raio r e massa dm é

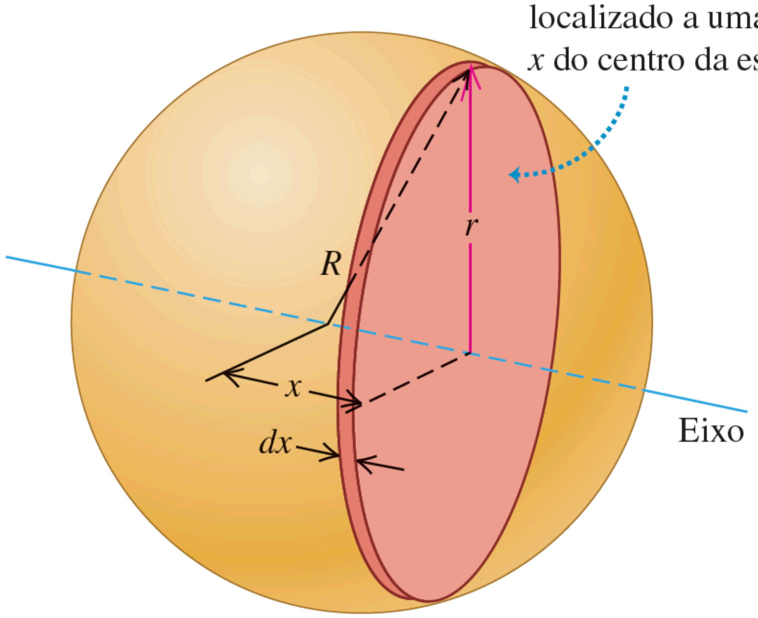
$$dI = \tfrac{1}{2}r^2\, dm = \tfrac{1}{2}(R^2 - x^2)\left[\pi\rho(R^2 - x^2)\, dx\right]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando a expressão anterior de $x = 0$ a $x = R$, obtemos o momento de inércia do hemisfério da direita. O momento de inércia total I para a esfera inteira, incluindo os dois hemisférios, é o dobro desse valor:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando, encontramos

$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$



Exemplo: esfera homogênea com raio r, eixo passando pelo centro

- **Determine o momento de inércia de uma esfera maciça e uniforme com densidade ρ (como uma bola de bilhar) em relação a um eixo que passa pelo seu centro.**

Integrando, encontramos

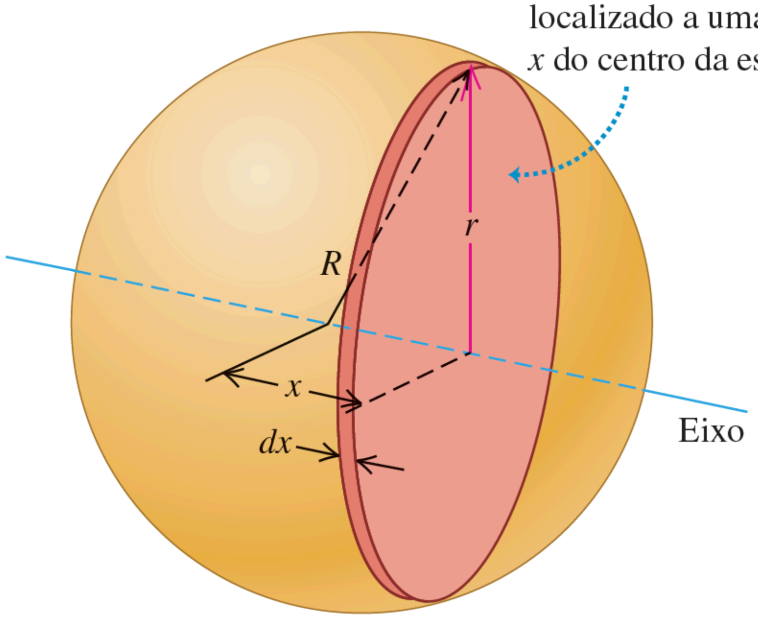
$$I = \frac{8\pi\rho R^5}{15}$$

O volume da esfera é $V = 4\pi R^3/3$, de modo que, em termos de sua massa M, sua densidade é dada por

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Logo, nossa expressão para I torna-se

$$I = \left(\frac{8\pi R^5}{15}\right)\left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right) = \tfrac{2}{5}MR^2$$



Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos das seções 9.4, 9.5 e 9.6**
  - *Exercícios da seção 9.4: 9.28, 9.29, 9.33, 9.39, 9.43, 9.44 e 9.47*
  - *Exercícios da seção 9.5: 9.48, 9.49 e 9.51*
  - *Exercícios da seção 9.6: 9.53, 9.54 e 9.55*