Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

A velocidade linear do passageiro é proporcional à velocidade angular

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 16 de Novembro de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Velocidade angular e aceleração angular**
- **Rotação com velocidade angular constante**
- **Relações entre a cinemática linear e a angular**
- **Exercícios de Fixação**

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Velocidade angular e aceleração angular**
- Rotação com velocidade angular constante
- Relações entre a cinemática linear e a angular
- Exercícios de Fixação

É necessário desenvolver uma formulação para o estudo de corpos que giram

- **O que existe em comum entre os movimentos de uma hélice de avião, de um disco de Blu-ray, de uma roda-gigante e de uma lâmina de serra circular?**
  - *Nenhum desses movimentos pode ser representado adequadamente como o movimento de um ponto*

- **A rotação ocorre em todas as escalas, desde o movimento de elétrons em átomos até movimentos de galáxias inteiras**
  - *Precisamos desenvolver métodos genéricos para analisar o movimento de corpos que giram*

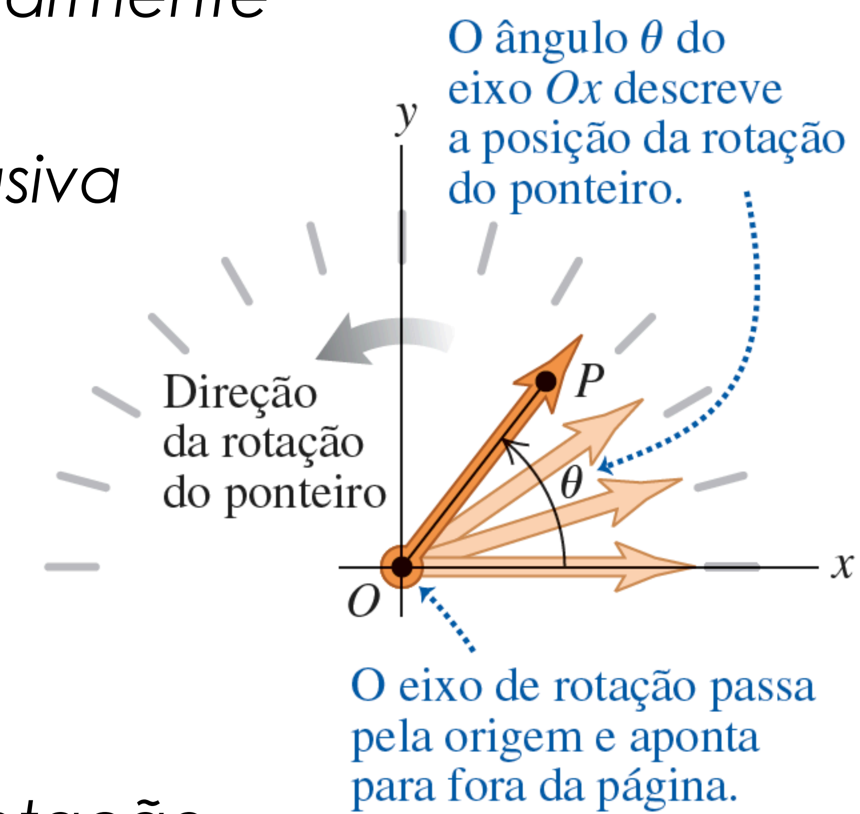
- **No mundo real, forças atuando em corpos em movimento podem deformá-los**

- **Por enquanto, iremos desprezar essas deformações e iremos supomos que os corpos possuem uma forma definida e imutável**
  - *Esse modelo de corpo ideal denomina-se CORPO RÍGIDO*

Temos que definir qual é a direção positiva do ângulo de rotação

- **Para analisarmos movimentos de rotação, vamos inicialmente nos restringir à rotação de corpos rígidos em torno de um eixo fixo**
  - *Tal eixo permanece em repouso em relação a algum referencial inercial e não muda de direção em relação a esse eixo*

- **A figura ao lado mostra um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo**
  - *O eixo passa através do ponto O perpendicularmente ao plano do diagrama (plano x-y)*
  - *O ângulo θ é uma coordenada angular exclusiva que descreve completamente a posição da rotação do corpo*



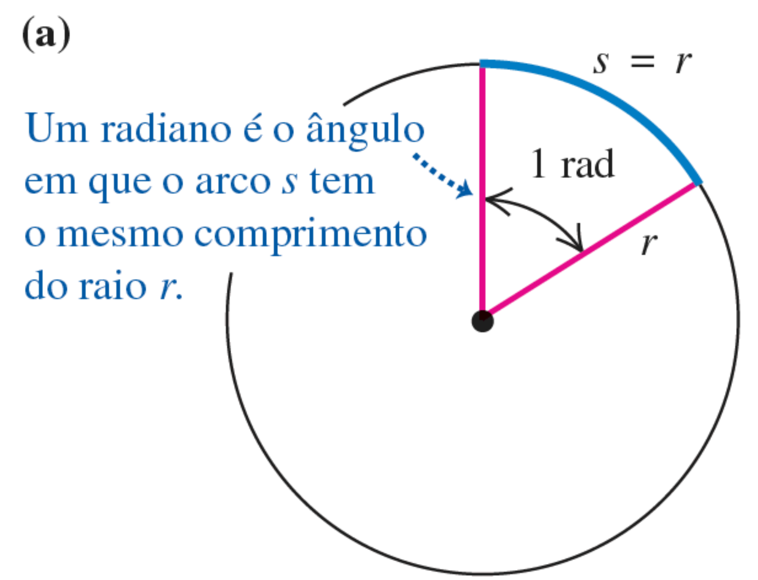
- **Quando estudamos o momento de uma partícula ao longo de uma linha reta, especificamos o deslocamento positivo ao longo da reta**
  - *Temos que especificar o sentido positivo da rotação*

A maneira natural de denotar ângulos é em radianos

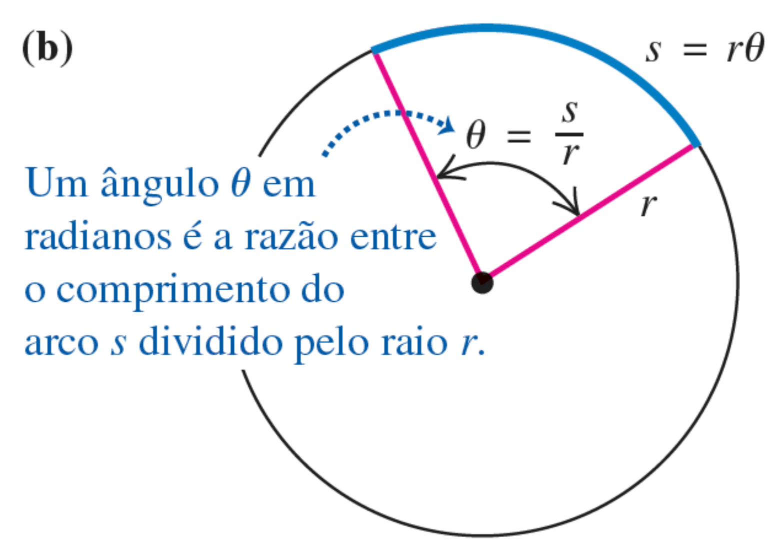
- **Para descrever o movimento de rotação, a maneira mais natural de medir o ângulo θ não é em graus, mas sim em RADIANOS**

- **O valor de θ é igual à s dividido por r:**

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{ou} \qquad s = r\theta \qquad (\theta \text{ em radianos})$$



- **Um ângulo em radianos é a razão entre dois comprimentos**
  - *Ele é representado por um número puro, sem dimensões*



- **O comprimento de uma circunferência é igual a 2π vezes o raio, de modo que existem 2π (cerca de 6,283) radianos em uma volta completa (360°). Logo**

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$$

As definições de velocidade angular média e instantânea

- **Podemos descrever o movimento de rotação de um corpo rígido em termos de uma taxa de variação do ângulo θ**
  - *Vamos fazer isso de modo semelhante ao método usado na descrição do movimento retilíneo visto no capítulo 2*

- **Definimos a velocidade angular média em torno do eixo z, ω_{mz}, em um intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a razão entre o deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e o intervalo de tempo Δt:**

$$\omega_{mz} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- **A velocidade angular instantânea ω_z é o limite de ω_{mz} quando Δt tende a zero:**

A **velocidade angular instantânea** de um corpo rígido girando em torno do eixo z ...

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

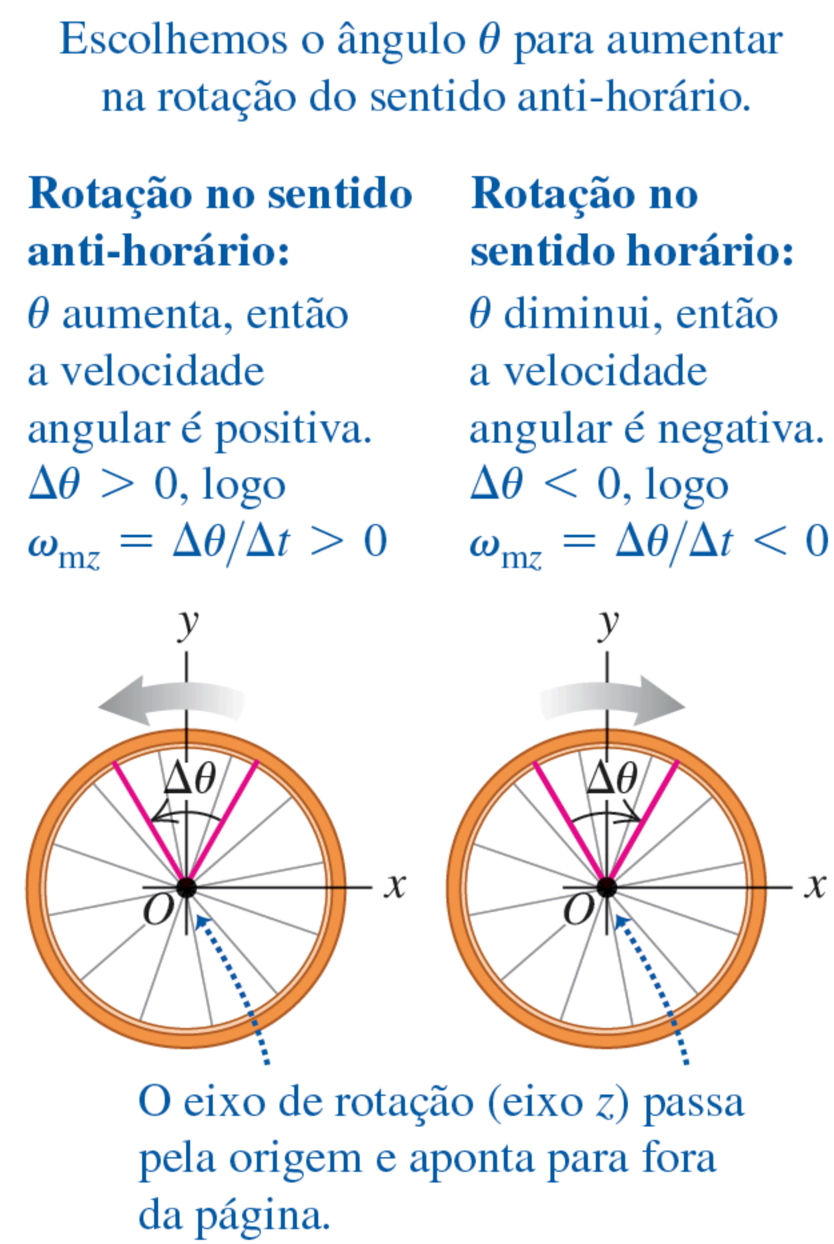
... é igual ao limite da velocidade angular média do corpo quando o intervalo aproxima-se de zero ...

... e é igual à taxa de variação instantânea da coordenada angular do corpo.

As definições de velocidade angular média e instantânea

- **A velocidade angular ω_z pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção em que o corpo rígido está girando**

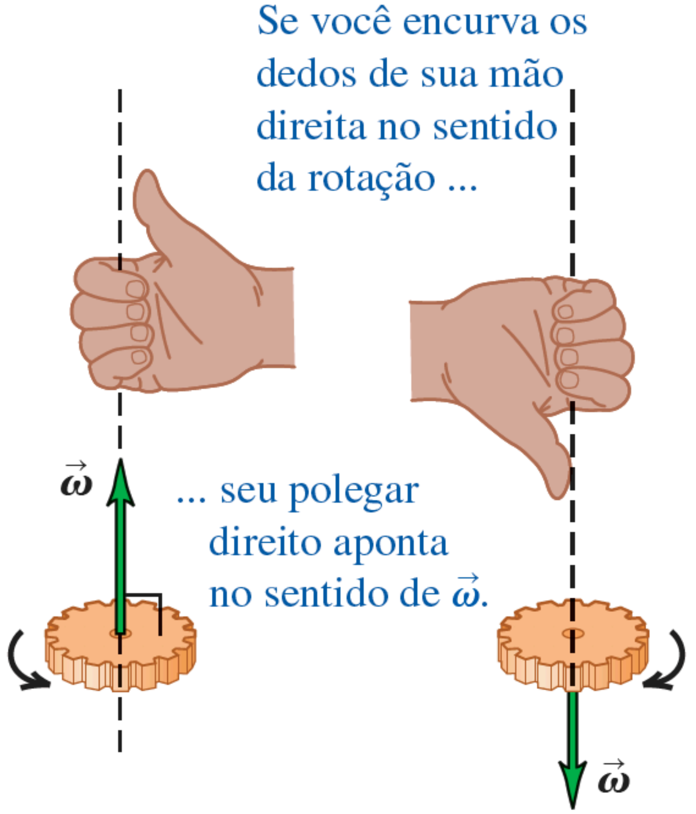
- **Pontos diferentes de um corpo rígido em rotação percorrem distâncias diferentes num mesmo intervalo de tempo dependendo da distância entre o ponto e o eixo de rotação**
  - *Porém, como o corpo é rígido, todos os pontos giram a um mesmo ângulo no mesmo instante*
  - *Portanto, em um dado instante, todos os pontos de um corpo rígido giram com a mesma velocidade angular*

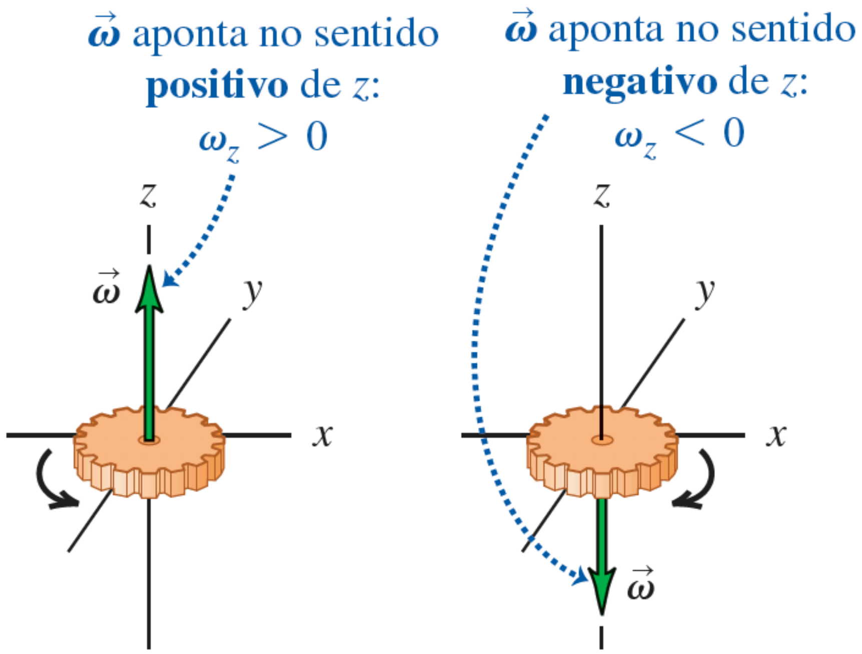


Velocidade angular como vetor

- **Nossa notação para a velocidade angular ω_z em torno do eixo z é uma extrapolação da notação v_x para a velocidade comum ao longo do eixo x**

- **Assim como v_x é o componente x do vetor velocidade, ω_z é o componente z de um vetor velocidade angular direcionado ao longo do eixo de rotação**





A formulação vetorial é especialmente útil em situações nas quais a direção do eixo de rotação varia

As definições de aceleração angular média e instantânea

- **Quando a velocidade angular de um corpo rígido varia, ele possui uma aceleração angular**
  - *Ao pedalar uma bicicleta com mais vigor para fazer as rodas girarem mais rapidamente, estamos imprimindo às rodas uma aceleração angular*

- **Definimos a aceleração angular média em torno do eixo z, α_{mz}, em um intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a razão entre a variação da velocidade angular $\Delta\omega_z = \omega_{2z} - \omega_{1z}$ e o intervalo de tempo Δt:**

$$\alpha_{\mathrm{m}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

- **A aceleração angular instantânea α_z é o limite de α_{mz} quando Δt tende a zero:**

A **aceleração angular instantânea** de um corpo rígido girando em torno do eixo *z*...

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

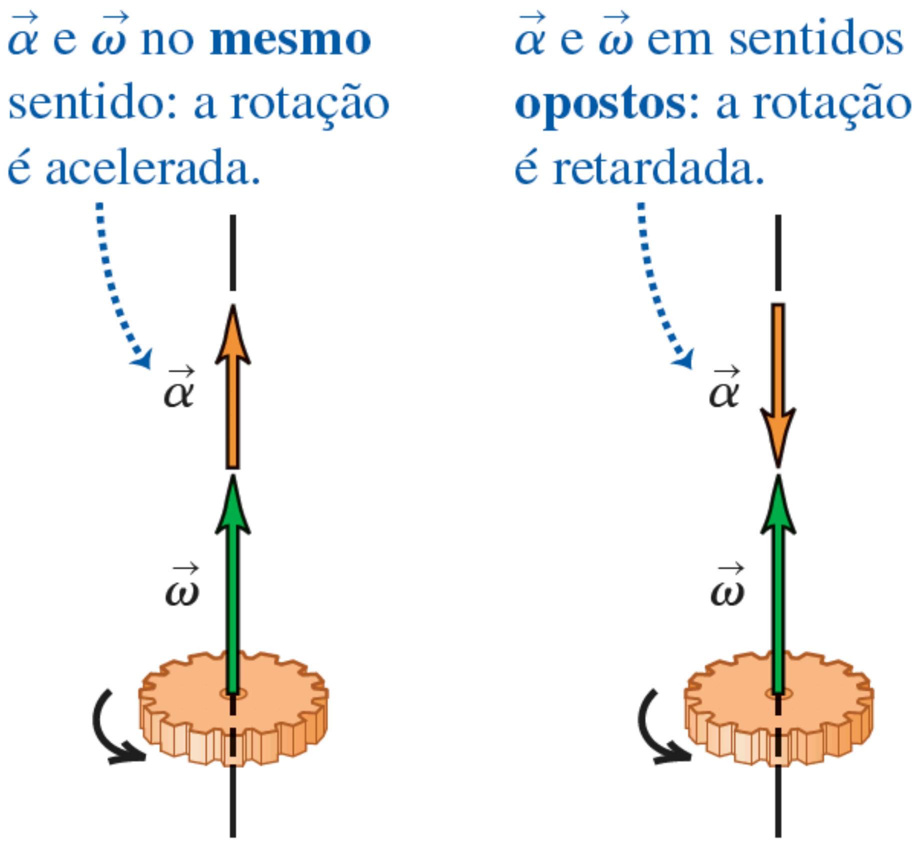
... é igual ao limite da aceleração angular média do corpo quando o intervalo aproxima-se de zero...

... e é igual à taxa instantânea de variação da velocidade angular do corpo.

Aceleração angular como vetor

- **Como fizemos com a velocidade angular, é útil definir um vetor de aceleração angular $\vec{\alpha}$. Em termos matemáticos, $\vec{\alpha}$ é a derivada temporal do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$**

- **Quando o eixo de rotação é fixo, os vetores de aceleração e de velocidade angular estão ao longo desse eixo**



Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Velocidade angular e aceleração angular
- **Rotação com velocidade angular constante**
- Relações entre a cinemática linear e a angular
- Exercícios de Fixação

As definições de aceleração angular média e instantânea

- **No Capítulo 2, vimos que o movimento retilíneo é particularmente simples quando a aceleração é constante**
  - *Isso também é verdade no caso do movimento de rotação em torno de um eixo fixo*

- **Quando a aceleração angular é constante, podemos deduzir equações para a velocidade e para a posição angular usando exatamente o mesmo procedimento utilizado para estudar o movimento retilíneo**

- **Seja ω_{0z} a velocidade angular de um corpo rígido no instante $t = 0$ e seja ω_z sua velocidade angular em um instante posterior t. A aceleração angular α_z é constante e igual à aceleração média para qualquer Δt, ou seja,**

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0}$$

Velocidade angular no instante t de um corpo rígido com **aceleração angular constante**

Velocidade angular do corpo no instante 0

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$$

Tempo

Aceleração angular constante do corpo

As definições de aceleração angular média e instantânea

- **Quando a aceleração angular é constante, a velocidade angular varia com uma taxa uniforme, de modo que seu valor médio entre 0 e t é dado pela média entre o valor inicial e o valor final:**

$$\omega_{mz} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2}$$

- **Também sabemos que ω_{mz} é dada pelo deslocamento total ($\theta - \theta_0$) dividido pelo intervalo ($t - 0$):**

$$\omega_{mz} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0}$$

- **Combinando estas duas equações e multiplicamos o resultado por t, obtemos**

Posição angular no instante t de um corpo rígido com **aceleração angular constante**

Posição angular do corpo no instante 0

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$$

Tempo

Velocidade angular do corpo no instante 0

Velocidade angular do corpo no instante t

As definições de aceleração angular média e instantânea

- **É possível obter uma relação entre θ e t que não contenha ω_z:**

Posição angular do corpo no instante 0

Tempo

Posição angular no instant t de um corpo rígido com **aceleração angular constante**

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2$$

Velocidade angular do corpo no instante 0

Aceleração angular constante do corpo

- **É possível ainda obter uma relação entre θ e ω_z que não contenha t:**

Velocidade angular no instante t de um corpo rígido com **aceleração angular constante**

Velocidade angular do corpo no instante 0

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$

Aceleração angular constante do corpo

Posição angular do corpo no instante t

Posição angular do corpo no instante 0

As definições de aceleração angular média e instantânea

Movimento retilíneo com aceleração linear constante		Rotação em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante	
$a_x = \text{constante}$		$\alpha_z = \text{constante}$	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x{}^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z{}^2 = \omega_{0z}{}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Velocidade angular e aceleração angular
- Rotação com velocidade angular constante
- **Relações entre a cinemática linear e a angular**
- Exercícios de Fixação

A necessidade de desenvolver relações entre quantidades lineares e angulares

- **Como podemos achar a velocidade linear e a aceleração de um dado ponto em um corpo girando?**

- **Precisamos responder a essa pergunta a fim de prosseguir com nossos estudos de rotação**
  - *Por exemplo, para achar a energia cinética de um corpo em rotação, devemos iniciar com a fórmula* $K = m\,v^2/2$ *para uma partícula, e isso requer o conhecimento de* v *para cada partícula do corpo*

- **Portanto, é necessário desenvolver relações gerais entre quantidades lineares e angulares de um ponto específico, ou de uma partícula específica, no corpo**

Relação entre velocidade linear e velocidade angular

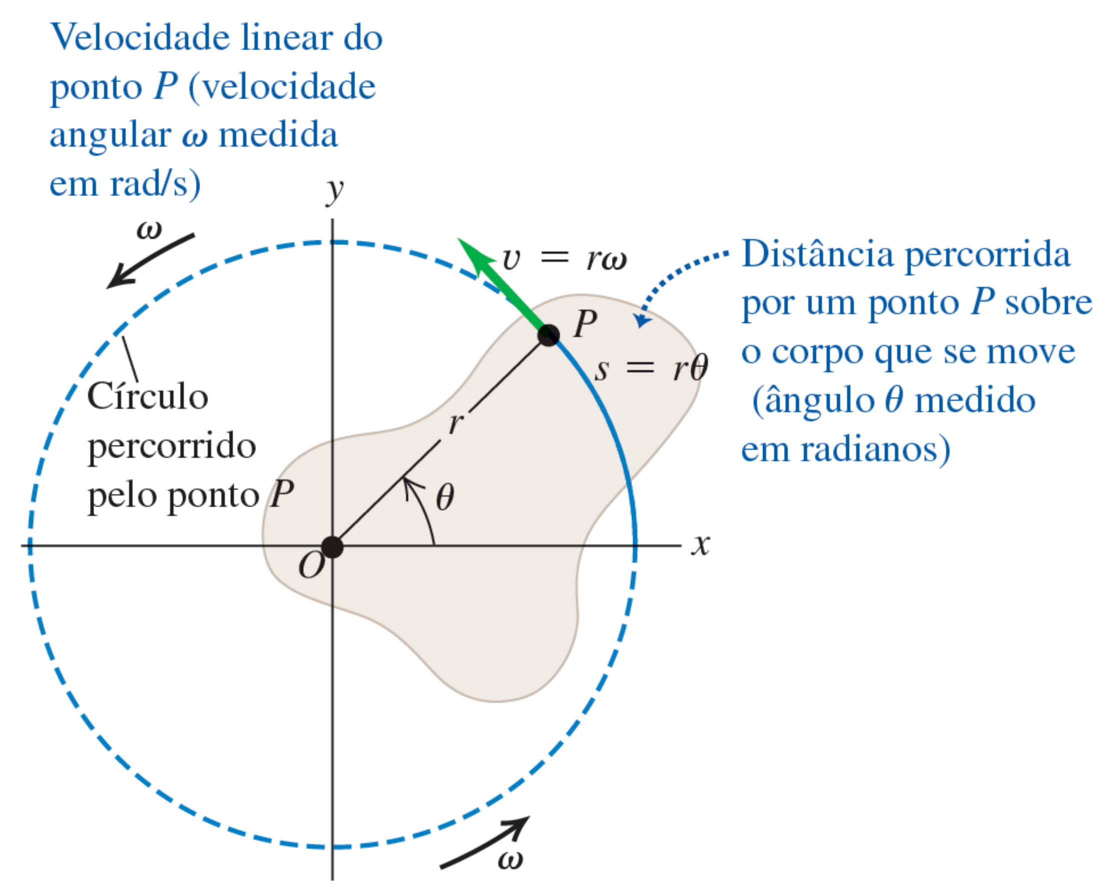
- **Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, cada partícula do corpo se move em uma trajetória circular**

- **Partindo do fato de que**

$$s = r\theta$$

- **e derivando essa equação em relação ao tempo, notando que r é constante para uma dada partícula, e tomando o módulo deste equação, obtemos**

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$



Velocidade linear de um ponto em um corpo rígido em rotação $\quad v = r\omega \quad$ **Velocidade angular** do corpo rígido em rotação

Distância entre esse ponto e o eixo de rotação

Relação entre aceleração centrípeta e velocidade angular

- **Lembrando que $a_{rad} = v^2/r$ podemos escrever**

Aceleração centrípeta de um ponto em um corpo rígido em rotação

Velocidade linear desse ponto

Velocidade angular do corpo

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Distância entre o eixo de rotação e esse ponto

- **Esse resultado é verdadeiro em cada instante, mesmo quando ω e v não são constantes**
  - *A aceleração centrípeta sempre aponta no sentido do eixo de rotação*

Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos das seções 9.1, 9.2 e 9.3**
  - *Exercícios da seção 9.1: 9.4, 9.5 e 9.8*
  - *Exercícios da seção 9.2: 9.10, 9.11, 9.13 e 9.16*
  - *Exercícios da seção 9.3: 9.18, 9.24 e 9.25*