Lógica
Aula 18

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Consequência Lógica

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

$$\Updownarrow$$

Para qualquer modelo $\mathcal{M}$ e qualquer atribuição a,
se $\mathcal{M}, a \models \varphi_i$, então $\mathcal{M}, a \models \psi$

Dois usos de $\models$

1. Para verificar $\mathcal{M} \models \varphi$, se $\mathcal{A}$ for infinito, podemos ter de testar infinitos elementos.

Dois usos de $\models$

1. Para verificar $\mathcal{M} \models \varphi$, se $\mathcal{A}$ for infinito, podemos ter de testar infinitos elementos.
2. Para verificar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$, temos de verificar **todos** os modelos.

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \not\models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

$\mathcal{M} \not\models \forall x(P(x) \to Q(x))$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}'$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}'} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}'} = \{a\}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}'$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}'} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}'} = \{a\}$

$\mathcal{M}' \models \forall x(P(x) \to Q(x))$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}'$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}'} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}'} = \{a\}$

$\mathcal{M}' \models \forall x(P(x) \to Q(x))$
$\mathcal{M}' \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \iff$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \iff$
$\mathcal{M}, a \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ para qualquer $a \iff$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \to Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x)) \iff$
$\mathcal{M}, a \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ para qualquer $a \iff$
para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models\ P(x) \to Q(x) \iff$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \to Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x)) \iff$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ para qualquer $a \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \to Q(x) \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models P(x)$ ou

$$\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models Q(x) \iff$$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \to Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x)) \iff$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ para qualquer $a \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \to Q(x) \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models P(x)$ ou

$\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models Q(x) \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \notin P^{\mathcal{M}}$ ou $d \in Q^{\mathcal{M}} \iff$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\forall x(P(x) \to Q(x))$:

$\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x)) \iff$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ para qualquer $a \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \ P(x) \to Q(x) \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models \ P(x)$ ou

$\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \ Q(x) \iff$

para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \notin P^{\mathcal{M}}$ ou $d \in Q^{\mathcal{M}} \iff$

$P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$
então $\mathcal{M} \models \forall x P(x)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x)$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

então $\mathcal{M} \models \forall x P(x)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x)$

$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \iff$ para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \in P^{\mathcal{M}} \iff P^{\mathcal{M}} = \mathcal{A}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

então $\mathcal{M} \models \forall x P(x)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x)$

$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \iff$ para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \in P^{\mathcal{M}} \iff P^{\mathcal{M}} = \mathcal{A}$

$\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x) \iff$ existe $d \in \mathcal{A}$, $d \notin Q^{\mathcal{M}} \iff Q^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{A}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

então $\mathcal{M} \models \forall x P(x)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x)$

$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \iff$ para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \in P^{\mathcal{M}} \iff P^{\mathcal{M}} = \mathcal{A}$

$\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x) \iff$ existe $d \in \mathcal{A}$, $d \notin Q^{\mathcal{M}} \iff Q^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{A}$

mas isto contradiz $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1'

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$

Se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$

Vamos supor que $\mathcal{M} \not\models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$
então $\mathcal{M} \models \forall x P(x)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x)$
$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \iff$ para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $d \in P^{\mathcal{M}} \iff P^{\mathcal{M}} = \mathcal{A}$
$\mathcal{M} \not\models \forall x Q(x) \iff$ existe $d \in \mathcal{A}$, $d \notin Q^{\mathcal{M}} \iff Q^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{A}$
mas isto contradiz $P^{\mathcal{M}} \subseteq Q^{\mathcal{M}}$
Logo, para qualquer $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \to Q(x))$, então
$\mathcal{M} \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x)$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x)$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\ &\quad \iff \text{ não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\
&\quad \iff \text{ não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \\
&\quad \iff \text{ não vale que para qualquer } d \in \mathcal{A}: \ \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que para qualquer } d \in \mathcal{A}\text{: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que não vale que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{ não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{ não vale que para qualquer } d \in \mathcal{A}: \ \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{ existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que não vale que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{ existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models P(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que para qualquer } d \in \mathcal{A}\text{: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que não vale que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \neg P(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg\forall x P(x) \models \exists x \neg P(x)$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \neg\forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que: } \mathcal{M}, a \models \forall x P(x) \\
&\quad\iff \text{não vale que para qualquer } d \in \mathcal{A}\text{: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que não vale que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \not\models P(x) \\
&\quad\iff \text{existe um } d \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \neg P(x) \\
&\quad\iff \mathcal{M}, a \models \exists x \neg P(x)
\end{aligned}$$

Equivalências Lógicas com Quantificadores

- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
- $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$
- $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$
- $\forall x\forall y\varphi \equiv \forall y\forall x\varphi$
- $\exists x\exists y\varphi \equiv \exists y\exists x\varphi$

Equivalências Lógicas com Quantificadores

Se x não ocorre livre em ψ:

- $\forall x\varphi \wedge \psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$
- $\forall x\varphi \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$
- $\exists x\varphi \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$
- $\exists x\varphi \vee \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$
- $\psi \to \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \to \varphi)$
- $\forall x\varphi \to \psi \equiv \exists x(\varphi \to \psi)$

Forma Prenex

Uma fórmula está na *forma normal prenex* se tem a seguinte forma:

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\, \varphi$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas, $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ e φ é uma fórmula sem quantificadores.

Forma Prenex

Uma fórmula está na *forma normal prenex* se tem a seguinte forma:

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \varphi$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas, $Q_i = \forall$ ou $Q_i = \exists$ e φ é uma fórmula sem quantificadores.

Toda fórmula da LPO é equivalente a uma fórmula na forma prenex.

Exemplo

$$\forall x(\exists y P(y) \vee (\exists z Q(z) \to R(x)))$$

Exemplo

$$\forall x(\exists y P(y) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

$$\equiv \forall x \exists y(P(y) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

Exemplo

$$\forall x(\exists y P(y) \vee (\exists z Q(z) \to R(x)))$$

$$\equiv \forall x \exists y(P(y) \vee (\exists z Q(z) \to R(x)))$$
$$\equiv \forall x \exists y(P(y) \vee \forall z(Q(z) \to R(x)))$$

Exemplo

$$\forall x(\exists y P(y) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \forall x \exists y(P(y) \vee (\exists z Q(z) \rightarrow R(x))) \\
&\equiv \forall x \exists y(P(y) \vee \forall z(Q(z) \rightarrow R(x))) \\
&\equiv \forall x \exists y \forall z(P(y) \vee (Q(z) \rightarrow R(x)))
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1)))$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\equiv \neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1)))$$
$$\equiv \neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg\exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg\forall x_1 (P(x_1,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1)))$$
$$\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))$$
$$\equiv \neg \forall x_1 (P(x_1,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))$$
$$\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 (P(x_1,y) \to \forall y_1 \neg(P(x_2,y) \land R(y_1)))$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg\exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg\forall x_1 (P(x_1,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg\forall x_1 \exists x_2 (P(x_1,y) \to \forall y_1 \neg(P(x_2,y) \land R(y_1)))\\
&\equiv \neg\forall x_1 \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \land R(y_1)))
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \land \exists y R(y)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \land R(y_1))) \\
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 (P(x_1,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \land R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 (P(x_1,y) \to \forall y_1 \neg(P(x_2,y) \land R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \land R(y_1))) \\
&\equiv \exists x_1 \neg \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \land R(y_1)))
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg(P(x,y) \wedge \exists y R(y)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \neg \forall x_1 (P(x_1,y) \to \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 (P(x_1,y) \to \forall y_1 \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \exists x_1 \neg \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1)))\\
&\equiv \exists x_1 \forall x_2 \neg \forall y_1 (P(x_1,y) \to \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1)))
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \neg(P(x,y) \wedge \exists y R(y)))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \neg \exists y_1 (P(x,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \neg(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 (P(x_1,y) \rightarrow \exists x \forall y_1 \neg(P(x,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 (P(x_1,y) \rightarrow \forall y_1 \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \neg \forall x_1 \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \rightarrow \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \exists x_1 \neg \exists x_2 \forall y_1 (P(x_1,y) \rightarrow \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \exists x_1 \forall x_2 \neg \forall y_1 (P(x_1,y) \rightarrow \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1))) \\
&\equiv \exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 \neg(P(x_1,y) \rightarrow \neg(P(x_2,y) \wedge R(y_1)))
\end{aligned}$$

Exercício 1

Seja

$$\varphi = \forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$$

Encontre $\mathcal{M}, a$ e $\mathcal{M}', a'$ tal que $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}', a' \not\models \varphi$.

Exercício 2

Seja $\mathcal{F} = \{d, f, g\}$, onde d é constante, f tem aridade 3 e g tem aridade 2.

Considere o modelo $\mathcal{M}$ dado por:

$$\mathcal{A} = \mathbb{N} \qquad d^{\mathcal{M}} = 2$$
$$f^{\mathcal{M}}(k, n, m) = k * n + m$$
$$g^{\mathcal{M}}(k, n) = k + n * n$$

e a função de atribuição a em que $a(x) = 5$ e $a(y) = 7$.

Calcule:

(a) $\|f(d, x, d)\|^{\mathcal{M},a}$

(b) $\|f(g(x, d), y, g(d, d))\|^{\mathcal{M},a}$