c) <u>Equações exatas:</u>

Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ contínuos no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

A equação diferencial

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

será <u>exata</u> se existir $\varphi = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y) \quad \text{em } \Omega.$$

Neste caso, as funções $y = y(x)$ ou $x = x(y)$ dadas implicitamente pelas equações $\varphi(x,y) = c$, $c =$ constante, são soluções da equação dada. De fato: como $\varphi(x,y) = c$ então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = 0 \Rightarrow P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Como determinamos se uma equação diferencial

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ é exata?

<u>Teorema</u>: Sendo P e Q de classe C^1 no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, a condição

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em } \Omega$$

é necessária e suficiente para a equação:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

ser exata.

<u>Exemplo</u>: A equação $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$ não é exata pois:

$$P(x,y) = x - y \qquad Q(x,y) = x + y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \text{são } \neq s.$$

Exemplo: Resolva a equação

$$y\,dx + (x+2y)\,dy = 0.$$

Solução: $P(x,y) = y$, $\quad Q(x,y) = x+2y$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ Logo como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, a equação é exata.

Vamos determinar agora aquela função $\varphi(x,y)$ tal que:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, e, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$, isto é:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x+2y \,. \end{cases}$$

para isso, integramos 1ª equação em relação x: $\varphi(x,y) = yx + h(y)$.

Derivando a ~~equação~~ em relação à y, é igual à $x+2y$, daí:

$x + h'(y) = x+2y \Longrightarrow h'(y) = 2y \Longrightarrow h(y) = y^2$. Logo podemos

tomar $\varphi(x,y) = yx + y^2$.

Portanto as soluções da forma $y = y(x)$ são dadas implicitamente

pela equação: $\quad yx + y^2 = c$, $\quad c = \text{constante}$.

De fato derivamos implicitamente temos: $y + xy' + 2yy' = 0 \Longrightarrow$

$$y + (x+2y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Exemplo: Determine a solução $y = y(x)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x\,dx + 2y\,dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Solução: a equação é exata pois $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

Precisamos achar φ / $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + h(y) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = h'(y) \Rightarrow h'(y) = 2y$

$\Rightarrow h(y) = y^2 + c \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 + c$, c = constante.

Como $y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + 4 = c \Rightarrow c = \frac{9}{2}$.

Logo $y^2 = c - \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{9-x^2}{2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{9-x^2}{2}}$, $-3<x<3$, é solução do problema.

<u>Exemplo</u>: Resolver $2x + y^2 + 2xyy' = 0$, com $y(0) = 1$.

<u>Solução</u>: observe que a equação pode ser escrita como:

$(2x+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$. Logo $P = 2x+y^2$, $Q = 2xy$.

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \Rightarrow$ como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ a equação é exata.

$\Rightarrow$ procuramos por φ / $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x+y^2 \rightarrow \varphi(x,y) = x^2+y^2x+h(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy \end{cases}$

$\Downarrow$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yx + h'(y)$

$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = 0$.

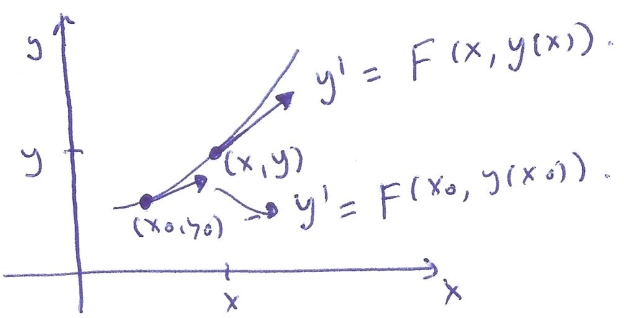
$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 + y^2x$.

Então a solução y é dada implicitamente por $x^2+y^2x = c$.

De fato: derivando implicitamente temos: $2x + 2yy'x + y^2 = 0$.

Como $y(0) = 1 \Rightarrow 0^2 + 1.0 = c \Rightarrow c = 0$, Logo a solução ao problema de valor inicial é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2x = 0$.

<u>Observe</u>:



Fator integrante: Algumas vezes é possível converter uma equação diferencial que não seja exata numa equação exata, multiplicando-a por um fator integrante apropriado.

De fato: suponha que a equação

(1) $$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \quad (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

não é exata.

Seja $u(x,y)$ função definida num aberto $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Dizemos que $u(x,y)$ é um fator integrante para (1) se a equação

$$u(x,y)\,P(x,y)\,dx + u(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0, \quad (x,y) \in \Omega_1$$

é exata.

Logo $u(x,y)$ é um fator integrante $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(uP) = \frac{\partial}{\partial x}(uQ)$, isto é:

Isto é: $$\frac{\partial u}{\partial y} P + u \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} Q + u \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial y} P - \frac{\partial u}{\partial x} Q = u\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Vejamos que condições devem ser satisfeitas para que equação (1) admita um fator integrante que só dependa de x, isto é procuramos por u da forma $u = u(x)$. Logo equação (2) fica:

$$-\frac{du}{dx} Q = u\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Agora, se o termo $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = h(x)$, temos que

$$-\frac{du}{dx} = u\,h(x) \Rightarrow \frac{du}{u} = -h(x)\,dx \Rightarrow \ln|u| = -\int h(x)\,dx$$

Isto é podemos tomar $u = e^{-\int h(x)\,dx}$.

Observe: Analogamente ao que foi feito acima de

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=f(y),$$ quando $u=u(y)$, e f é contínua,

A equação admitirá o fator integrante $u=e^{\int f(y)dy}$.

Exemplo: Resolva a equação

$$(x^2+y^2)dx+(x^3+3xy^2+2xy)dy=0$$

Solução: $P(x,y)=x^2+y^2$, $Q(x,y)=x^3+3xy^2+2xy \Rightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+3y^2+2y$. Logo a equação não é exata.

Mas $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+3y^2+2y-2y=3x^2+3y^2=3(x^2+y^2)$.

$\Rightarrow \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=3.$ Portanto a equação diferencial admite o fator integrante $u(y)=e^{\int 3dy}=e^{3y}$. Como $u(y)\neq 0$,

então $e^{3y}(x^2+y^2)dx+e^{3y}(x^3+3xy^2+2xy)dy=0$ é exata.

Achemos agora φ / $\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=e^{3y}(x^2+y^2)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=e^{3y}(x^3+3xy^2+2xy).\end{cases}$

$\Rightarrow \varphi(x,y)=e^{3y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)+h(y)\Rightarrow$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=3e^{3y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)+e^{3y}(2yx)+h'(y)=e^{3y}(x^3+3y^2x+2yx)+$ $+h'(y)$.

Comparando com equação (2), temos que $h'(y)=0\Rightarrow h(y)=0$.

Logo $\varphi(x,y)=e^{3y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)$ satisfez o sistema.

Portanto as soluções da equação são dadas implicitamente pela equação $e^{3y}\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)=c$. ou por:

$$x^3+3y^2x=c\,e^{-3y}.$$

d) Equações lineares de 1^a ordem:

uma equação linear de primeira ordem é uma equação do tipo:

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x)y+g(x)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas definidos num mesmo intervalo I.

1) se $f(x)=cte$, a equação (3) é dita linear com coeficientes constantes. Caso contrário, de coeficientes variáveis.

2) se $g(x)=0$, a equação (3) é chamada de equação linear homogênea de 1^{a} ordem.

Exemplo: 1) $\frac{dy}{dx}=xy+1$, é linear, coef. variáveis, de 1^a ordem.

2) $\frac{dy}{dx}=x^2y$, é linear de 1^a ordem, coef. variáveis.

3) $\frac{dy}{dx}=5y^2+\operatorname{sen}x$, não é linear.

Observe, se $g(x)=0$, ie, a equação é homogênea, a equação fica: $\frac{dy}{dx}=f(x)y$. A solução dela é:

$\frac{dy}{y}=f(x)dx$, com $y\neq 0$. $\Rightarrow$ $\ln|y|=\int f(x)dx+c$ $\Rightarrow$

$|y|=e^{\int f(x)dx}.e^{c}$ $\Rightarrow$ $y=c_1e^{\int f(x)dx}$, onde

$c_1=e^c$, é solução da equação.

Observe: se $g(x) \neq 0$, temos então a equação:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x). \text{ Isto é: } (f(x)y + g(x))\,dx - dy = 0.$$

onde identificamos $P = f(x)y + g(x)$, $Q = -1$. Como

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q(x,y)} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial y}}{-1} = \frac{\partial P}{\partial y} = f(x),$$ depende unicamente de x,

então $u(x) = e^{-\int f(x)dx}$ é o fator integrante para a equação. Logo $e^{-\int f(x)dx}\frac{dy}{dx} = e^{-\int f(x)dx} f(x)y + e^{-\int f(x)dx} g(x)$,

é exata. E assim temos que:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int f(x)dx} y\right) = e^{-\int f(x)dx} g(x),$$ isto é:

que $$y e^{-\int f(x)dx} = \int e^{-\int f(x)dx} g(x)\,dx + k$$

onde k = constante de integração. Logo

(4) $$y(x) = e^{\int f(x)dx}\left[k + \int e^{-\int f(x)dx} g(x)\,dx\right]$$ é a solução da equação linear 1ª ordem.

Observe que temos feito: colocamos a equação diferencial linear de 1ª ordem numa equação exata.

Exemplo: Resolver o problema de valor inicial:

$$y' - \frac{y}{2} = e^{-x}, \quad \text{com } y(0) = -1.$$

Solução: $y' = \frac{y}{2} + e^{-x} \Rightarrow u(x) = e^{-\int \frac{1}{2}dx} = e^{-x/2}$.

$$\Rightarrow e^{-x/2}y' = e^{-x/2}\left(\frac{y}{2}+e^{-x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x/2}y\right) = e^{-x/2}e^{-x} = e^{-\frac{3}{2}x} \Rightarrow$$

$$e^{-x/2}y = \int e^{-\frac{3}{2}x}dx + k \Rightarrow y = e^{x/2}\left[k - \frac{2}{3}e^{-3/2\,x}\right] \Rightarrow$$

$y = k e^{x/2} - \frac{2}{3}e^{-x}$ é solução.

Como $y(0) = -1$, temos que $-1 = k - \frac{2}{3} \Rightarrow k = -1/3$,

assim $y = -\frac{1}{3}e^{x/2} - \frac{2}{3}e^{-x}$ é solução do problema de valor inicial.

Exemplo: Achar solução para: $y' = 2y + e^x$.

Solução: a equação é linear de 1ª ordem, não-homogênea.

Logo usando a fórmula (4) temos que:

$$y = k e^{\int 2dx} + e^{\int 2dx}\int e^{-\int 2dx}e^x dx$$

$$= k e^{2x} + e^{2x}\int e^{-2x}e^x dx = k e^{2x} + e^{2x}\int e^{-x}dx$$

$$= k e^{2x} + e^{2x}(-e^{-x}) = k e^{2x} - e^x, \text{ isto é:}$$

$y = k e^{2x} - e^x$ é solução da ~~equação~~ equação.

(com k = constante)

De fato: $y' = 2ke^{2x} - e^x = 2(ke^{2x} - e^x) + e^x$

$y' = 2y + e^x$ ✓