PME3100 Mecânica I

**Dinâmica do Sólido**

Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

## *5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*

Seja um sistema de $N$ pontos materiais $P_i$ de massas $m_i (i = 1, 2, \cdots, N)$, com respectivas velocidades $\vec{v}_i$. Seja $O$ um ponto escolhido arbitrariamente. A *quantidade de movimento angular* total do sistema, em relação ao polo $O$, é definida por:

$$\vec{H}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Derivando essa expressão em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i$$

1º termo:

$$\sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \wedge \vec{v}_O = \left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) \wedge \vec{v}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O$$

2º termo:

$$\sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \vec{M}_O$$

Entretanto, como já foi visto anterioremente: $\vec{M}_O = \vec{M}_O^{ext}$

Portanto:

$$\boldsymbol{\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}}$$

Escolhendo o ponto $O$ fixo ou coincidente com o centro de massa G do sistema, temos:

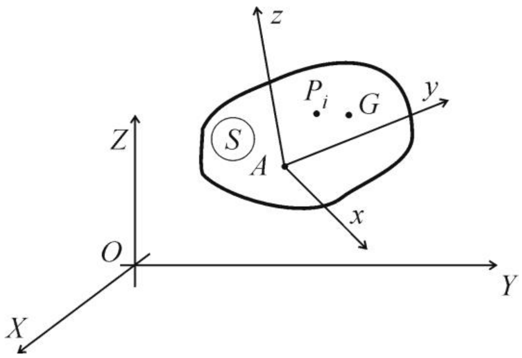
$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext}$$

Assim, o enunciado do ***Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*** é:

*"A variação da quantidade de movimento angular de um sistema material, em relação a um polo fixo ou ao seu centro de massa, é igual ao momento de todas as forças externas, em relação ao mesmo polo."*

---

### *5.1 Cálculo da quantidade de movimento angular de um corpo rígido, em relação a um ponto A desse corpo.*




Consideremos o sólido (corpo rígido) *S* movendo-se em relação ao referencial OXYZ. Seja *G* o seu centro de massa e *A* um ponto qualquer deste sólido. Este sólido pode ser considerado como um sistema de partículas $P_i$ de massas $m_i$. Pela definição:

$$\vec{H}_A = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_i$$

Como temos um corpo rígido e *A* é um ponto desse corpo, podemos escrever:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)$$

onde $\vec{\omega}$ é o vetor rotação do sólido.

Assim:

$$\vec{H}_A = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i [\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] =$$

$$= \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_A + \sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)]$$

1º termo:

$$\sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_A = [\sum_i m_i (P_i - A)] \wedge \vec{v}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A$$

2º termo: Seja o sistema de coordenadas *Axyz*, não necessariamente solidário ao corpo rígido. Com relação a este sistema, podemos escrever:

$$P_i - A = x_i \vec{\imath} + y_i \vec{\jmath} + z_i \vec{k}$$
$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{\imath} + \omega_y \vec{\jmath} + \omega_z \vec{k}$$

Usando estas componentes, teremos:

$$\begin{aligned}
&\sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] = \\
&= \sum_i m_i \{ [(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \vec{\imath} + \\
&+ [-y_i x_i \omega_x + (z_i^2 + x_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z] \vec{\jmath} + \\
&+ [-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z] \vec{k} \} = \\
&= [\omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i] \vec{\imath} + \\
&+ [-\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i] \vec{\jmath} + \\
&+ [-\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)] \vec{k}
\end{aligned}$$

As somatórias acima são os momentos e produtos de inércia do sólido em relação aos eixos *x*, *y* e *z*. Assim, este 2º termo fica como:

$$\begin{aligned}
&\sum_i (P_i - A) \wedge [m_i \vec{\omega} \wedge (P_i - A)] = \\
&= (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \vec{\imath} + \\
&+ (-J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z) \vec{\jmath} + \\
&+ (-J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z) \vec{k}
\end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de movimento angular de um corpo rígido, em relação a um ponto *A* desse corpo, que é a origem dos eixos *x*, *y* e *z*, será:

$$\boldsymbol{\vec{H}_A = m(G-A)\wedge\vec{v}_A +}$$
$$\boldsymbol{+\left(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z\right)\vec{\imath} +}$$
$$\boldsymbol{+\left(-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z\right)\vec{\jmath} +}$$
$$\boldsymbol{+\left(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z\right)\vec{k}}$$

Em casos particulares, esta expressão pode se simplificar bastante.

---

**OBS.1**: O primeiro termo é nulo quando *A* coincide com o centro de massa *G*, ou quando *A* for um ponto fixo.

---

**OBS.2**: TQMA em notação matricial:

$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$; $\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$; Produto vetorial: $\{a\}\wedge\{b\} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$

Matriz de inércia, sistema (*A*,*x*,*y*,*z*): $[J_A] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$

$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$; $(G-A) = \{G\} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{Bmatrix}$

Temos:

$$\boldsymbol{\left\{\dot{H}_O\right\} = m\{v_G\}\wedge\{v_O\} + \{M_O^{ext}\}}$$

e, para um sólido:

$$\boldsymbol{\{H_A\} = m\{G\}\wedge\{v_A\} + [J]\{\omega\}}$$

---

# RESUMO

## *Teorema da Resultante (TR)*

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext}$$

## *Teorema da Energia Cinética (TEC) – (sólido)*

$$\Delta T = \tau_{ext}$$

*Energia cinética de um sólido:*

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_{G\omega}\omega^2$$

## *Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)*

*Sistema material qualquer, em relação a um polo O qualquer:*

$$\dot{\vec{H}}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$$

*Quantidade de movimento angular de um sólido, em relação a um ponto A desse corpo:*

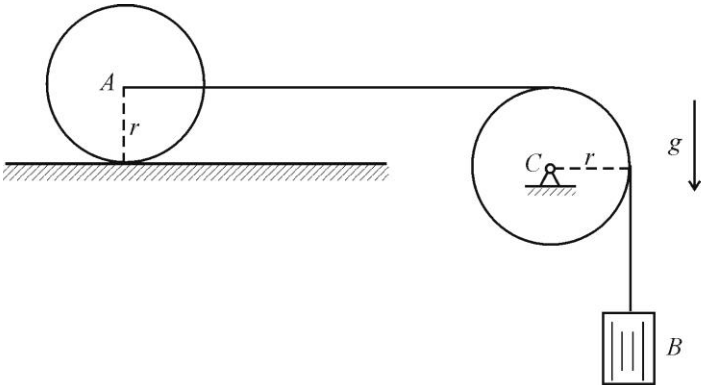
$$\begin{aligned}
&\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + \\
&+\left(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z\right)\vec{i} + \\
&+\left(-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z\right)\vec{j} + \\
&+\left(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

**<u>Exemplo 5.1</u>**: O disco homogêneo de centro *A* e a polia homogênea de centro *C* têm a mesma massa *m* e o mesmo raio *r*. O disco *A* rola sem escorregar sobre o plano horizontal, enquanto o bloco *B* de massa 3*m* desce verticalmente. O cabo é um fio ideal sem escorregamento, passa pela polia *C* e se liga ao bloco *B*. Sendo dados $J_A = J_C = mr^2/2$, determine:

a) a aceleração do bloco *B*;

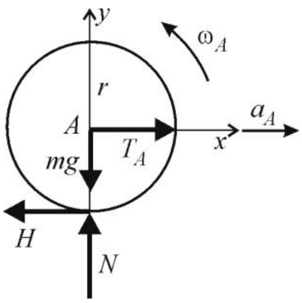
b) as trações $T_A$ e $T_B$ nos cabos, em *A* e *B*, respectivamente;

c) a componente horizontal *H* da reação do plano horizontal sobre o disco.




*Resolução:*

<u>Disco A:</u>




TR: $ma_A\vec{\imath} = (T_A - H)\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$

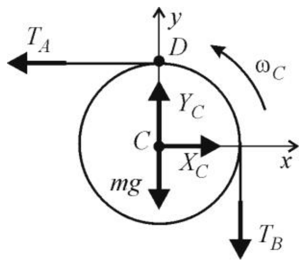
$$\Rightarrow \begin{cases} ma_A = T_A - H \\ N = mg \end{cases} \qquad (1)$$

TMA: polo *A* (centro de massa); *x* e *y* com origem em *A*, <u>mas não giram</u>

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\omega}_A = \omega_A\vec{k}\ \left(\omega_x = \omega_y = 0\right) \\ &J_{xz} = J_{yz} = 0 \text{ (simetria)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{H}_A = \omega_A J_z\vec{k} = \frac{\omega_A mr^2}{2}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_A = \frac{\dot{\omega}_A mr^2}{2}\vec{k} \\ &\vec{M}_A^{ext} = -Hr\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = -\frac{\dot{\omega}_A mr}{2} \qquad (2)$$

<u>Disco C:</u>

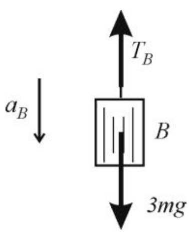



TR: $\vec{0} = (X_C - T_A)\vec{\imath} + (Y_C - T_B - mg)\vec{\jmath}$

TMA: $\vec{H}_C = \omega_C J_C\vec{k} = \frac{\omega_C mr^2}{2}\vec{k} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_C = \frac{\dot{\omega}_C mr^2}{2}\vec{k} \\ &\vec{M}_C^{ext} = (T_A - T_B)r\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_A - T_B = \frac{\dot{\omega}_C mr}{2} \qquad (3)$$

<u>Bloco B:</u>




TR: $3ma_B = 3mg - T_B \qquad (4)$

Até agora, temos 4 equações com 7 incógnitas: $H, T_A, T_B, \dot{\omega}_A, \dot{\omega}_C, a_A$ e $a_B$.

<u>Relações cinemáticas:</u>

- não há escorregamento: $v_A = -\omega_A r \Rightarrow a_A = -\dot{\omega}_A r$ (5)

- fio inextensível:

$$a_A = a_B \qquad (6)$$

$$v_A = v_D \Rightarrow -\omega_A r = -\omega_C r \Rightarrow \dot{\omega}_A = \dot{\omega}_C \qquad (7)$$

Assim, obtemos mais 3 equações e o problema pode ser resolvido.

Por substituições sucessivas:

a) $\boldsymbol{a_B = \frac{3g}{5}}$

b) $\boldsymbol{T_B = \frac{6mg}{5}}$ e $\boldsymbol{T_A = \frac{9mg}{10}}$

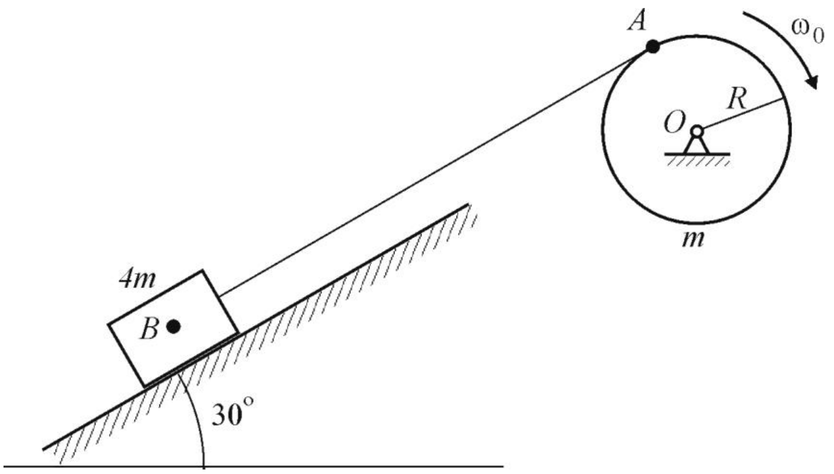
c) $\boldsymbol{H = \frac{3mg}{10}}$

---

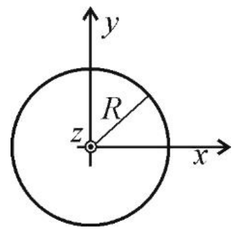
**<u>Exemplo 5.2 (ver também exemplo 4.2)</u>**: No sistema indicado na figura, o disco de centro $O$ possui raio $r$ e massa $m$. O bloco possui massa $4m$. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano é $\mu$. Sabemos que no instante $t = 0$ a velocidade angular do disco é $\omega_0$ no sentido indicado.

(a) determine após quanto tempo a velocidade angular se anula;

(b) analise o comportamento do sistema após esse tempo.



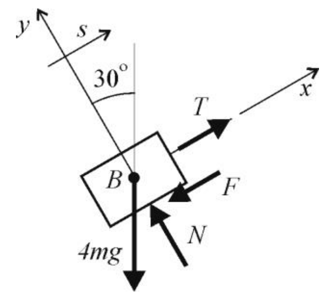

Dado:




$$J_z = \frac{MR^2}{2}$$

*Resolução*:

(a) Isolando o bloco e o disco:




<u>Bloco:</u>

TR: $4ma_B\vec{\imath} = (T - F - 4mg\sin 30°)\vec{\imath} + (N - 4mg\cos 30°)\vec{\imath} \Rightarrow$

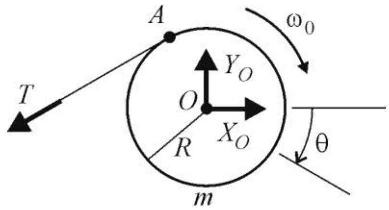
$$\Rightarrow \begin{cases} 4ma_B = T - F - 2mg & (1) \\ N = 2\sqrt{3}mg & (2) \end{cases}$$

Lei de Coulomb, escorregando : $F = \mu N$

$$\tau^{ext} = \tau_T + \tau_F + \tau_{peso} = \int_{s_0}^{s} T ds - 2\sqrt{3}\mu mgs - 2mgs$$
$$\Delta T = \frac{1}{2} 4m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right)$$

TEC: $\int_{s_0}^{s} T ds = 2\left(\sqrt{3}\mu + 1\right) mgs + 2m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right)$ (3)

<u>Disco</u>:




$$\tau^{ext} = \int_{\theta_0}^{\theta} (-T) r d\theta$$
$$\Delta T = \frac{1}{2} J_G\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = \frac{mr^2}{4}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

TEC: $\int_{\theta_0}^{\theta} T r d\theta = -\frac{mr^2}{4}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$ (4)

Como o fio é inextensível, temos: $s = r\theta \Rightarrow ds = r d\theta$ e $\dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega$

Assim, re-escrevendo (3): $\int_{\theta_0}^{\theta} T r d\theta = 2\left(\sqrt{3}\mu + 1\right) mgr\theta + 2mr^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$

Substituindo em (4): $\theta = \frac{9r}{8g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$

Derivando em relação ao tempo: $\dot{\theta} = -\frac{9r}{4g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}\omega\dot{\omega}$

Com $\dot{\theta} = \omega$, obtemos: $\dot{\omega} = -\frac{4g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}{9r} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{4g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}{9r} t$

Para $\omega = 0$, temos: $\boldsymbol{t^* = \frac{9r}{4g\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}\omega_0}$

(b) TQMA para o disco: $\vec{H}_O = J_O(-\omega)\vec{k} = -\frac{mr^2}{2}\omega\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = -\frac{mr^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = Tr\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{2mg\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}{9}$$

A equação (1) fornece:

$$4ma_B = T - F - 2mg = \frac{2mg\left(\sqrt{3}\mu+1\right)}{9} - F - 2mg = \frac{2mg\left(\sqrt{3}\mu-8\right)}{9} - F$$

**<u>Para o bloco descer</u>:** $a_B < 0$ com $F = -\mu N = -2\sqrt{3}\mu mg$; assim:

$$\frac{2mg\left(\sqrt{3}\mu-8\right)}{9} + 2\sqrt{3}\mu mg < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\mu < \frac{4\sqrt{3}}{15}}$$

**Se $\boldsymbol{\mu \geq \frac{4\sqrt{3}}{15}}$, o bloco permanece parado.**