



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Introdução aos Elementos de Máquinas

PMR 3320 – A11

Engrenagens

2020.2



Planejamento

Dia	S	Aula	Tópico	Prof.
17.08	2ª	A1	Introdução a disciplina Modelagem, carregamento e equilíbrio	RS
24.08	2ª	A2	Composição de tensões Estado plano de tensões - Círculo de Mohr	RS
31.08	2ª	A3	Composição de tensões Diagramas de esforços	RS
07.09	2ª	---	Feriado - Independência do Brasil	
14.09	2ª	A4	Teorias de Falha: 2) Falha por deformação permanente: von Mises, Tresca, Coulomb-Mohr	RS
21.09	2ª	A5	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga	RS
28.09	2ª	A6	Fixações cubo-eixo	NG
05.10	2ª	A7	Dimensionamento de Eixos	NG
12.10	2ª	---	Feriado - Dia da Criança	
19.10	2ª	A8	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Rebites	NG
26.10	2ª	A9	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos	NG
02.11	2ª	---	Feriado - Finados	
09.11	2ª	A10	Especificação e dimensionamento de elementos de transmissão: Fusos	RS
16.11	2ª	A12	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens	RS
23.11	2ª	A13	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais	RS
30.11	2ª	A17	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas	NG
07.12	2ª	A18	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Acoplamentos e embreagens	NG
14.12	2ª		Encerramento do semestre 2020-2	





Introdução

Engrenagens são elementos de máquinas utilizados para transmissão, direcionamento, amplificação e redução de velocidades e forças (torques), entre elementos rotativos.

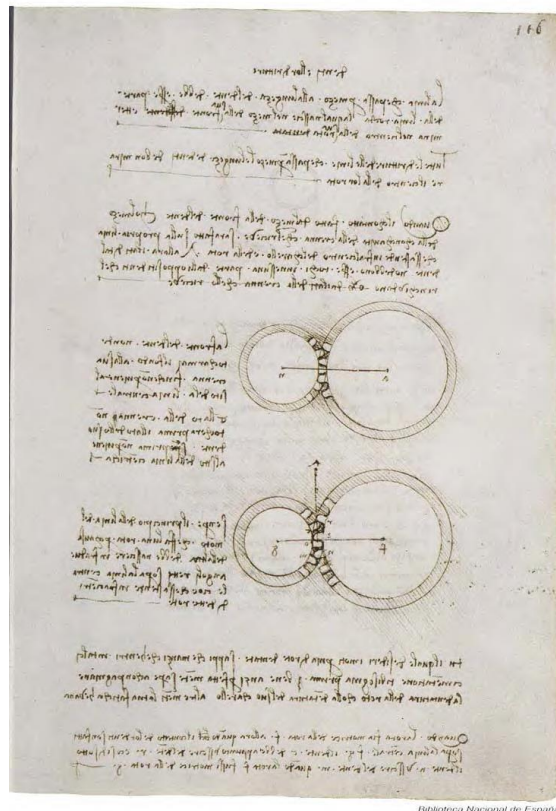
Referência: Capítulos **13**, 14 e 15 do Shigley's Mechanical Engineering Design, Eighth Edition, McGraw-Hill Primis, 2006





Generalidades

- ⇒ Primeiras aplicações datam do século I – dispositivo de medição do tempo
- ⇒ Século 13 – relógios
- ⇒ Século 15 - vários estudos, propostas e rascunhos de Leonardo da Vinci no campo da engrenagens



Torre da prefeitura de Praga, República Tcheca.
Relógios astronômico e horário



Generalidades

- ⇒ Século XVI - desenvolvimento de engrenagens para sistemas de elevação da água, moinhos de vento, relógios planetários e calendários, ...
- ⇒ Século XVI – Ph. la Hire (1695 – *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques*) primeiras leis do engrenamento, desenvolvimento de um sistema com dentes com translação constante
- ⇒ Século XVIII – Abbé Camus (1699-1768) geração de dentes de perfil circular para o pareamento



Generalidades

- ⇒ Século XVIII – Tratado de Euler (1752) propões o uso de envolvente para gerar o perfil dos dentes de engrenamento
- ⇒ Século XIX - revolução industrial, uso generalizado de engrangens em máquinas, redutores, etc.
- ⇒ Século XIX - Robert Buchanan (1808) formula a leis precursoras do engrenamento
- ⇒ Século XIX – James White (1808) patenteia a engrenagem helicoidal



Introdução

- ▶ Engrenagens permitem fazer isto com um movimento uniforme e com confiabilidade
- ▶ Engrenagens são um dos mais importantes elementos de máquinas
- ▶ Engrenagens conseguem cobrir um amplo leque de aplicações
- ▶ Existem poucos sistemas mecânicos que não necessitam transmitir potência ou movimento entre elementos com movimento rotativos





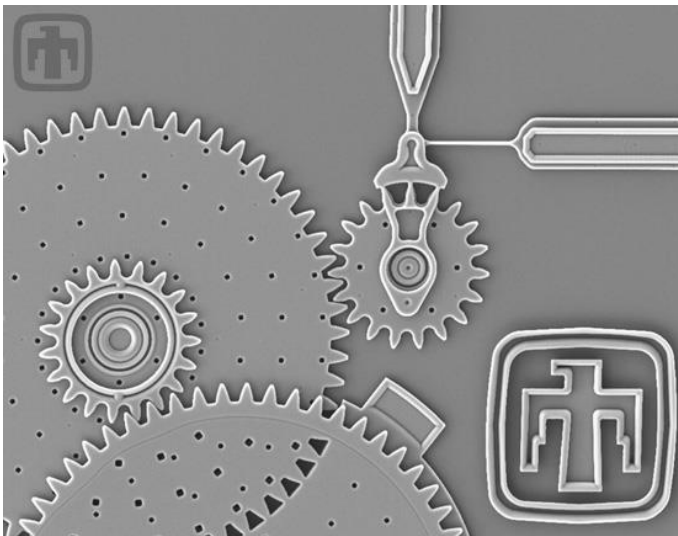
Introdução

- ▶ Engrenagens permitem a transmissão de potência
- ▶ Engrenagem conseguem cobrir um amplo leque de aplicações, de alguns milímetros a metros
- ▶ Engrenagens proporcionam posicionamento angular e linear muito precisos
- ▶ Engrenagens transmitem potência e movimento a eixos paralelos, perpendiculares e inclinados
- ▶ O projeto de engrenagens é padronizado de acordo com a forma e dimensão, o que provem intercambiabilidade

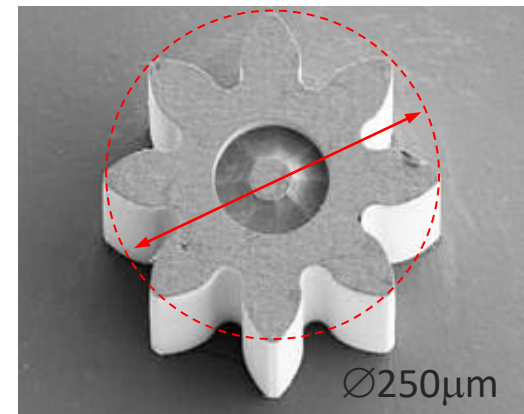


Introdução

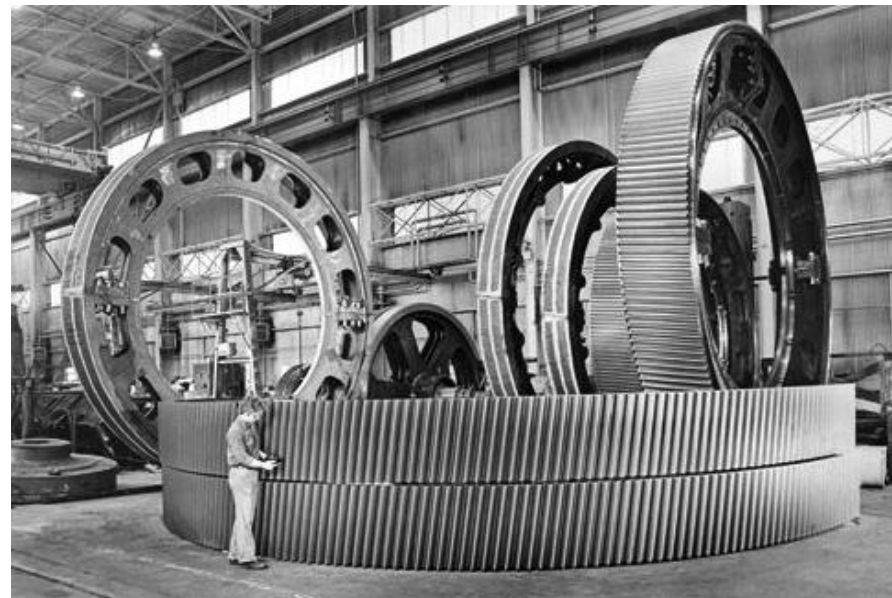
- ▶ tudo é uma questão de dimensões



http://www.sandia.gov/mstc/_assets/images/mems/gallery/gears/1.jpg



<https://www.iam.kit.edu/wpt/410.php>





Tipos de Engrenagens

Cilíndricas

dentes
retos



dentes
helicoidais



Cônicas

dentes
retos



dentes
espiral



Hypóides



Cremalheiras



Sem-fins





Tipos de engrenagens



engrenagem cilíndrica
de dentes retos



Engrenagem cilíndrica
dentes helicoidais



Engrenagem bi
helicoidal



Engrenagem cônica
de dentes hypóides



Engrenagem cônica
de dentes inclinados



Engrenagem cônica
de dentes retos



engrenagem interna



engrenagem sem-fim

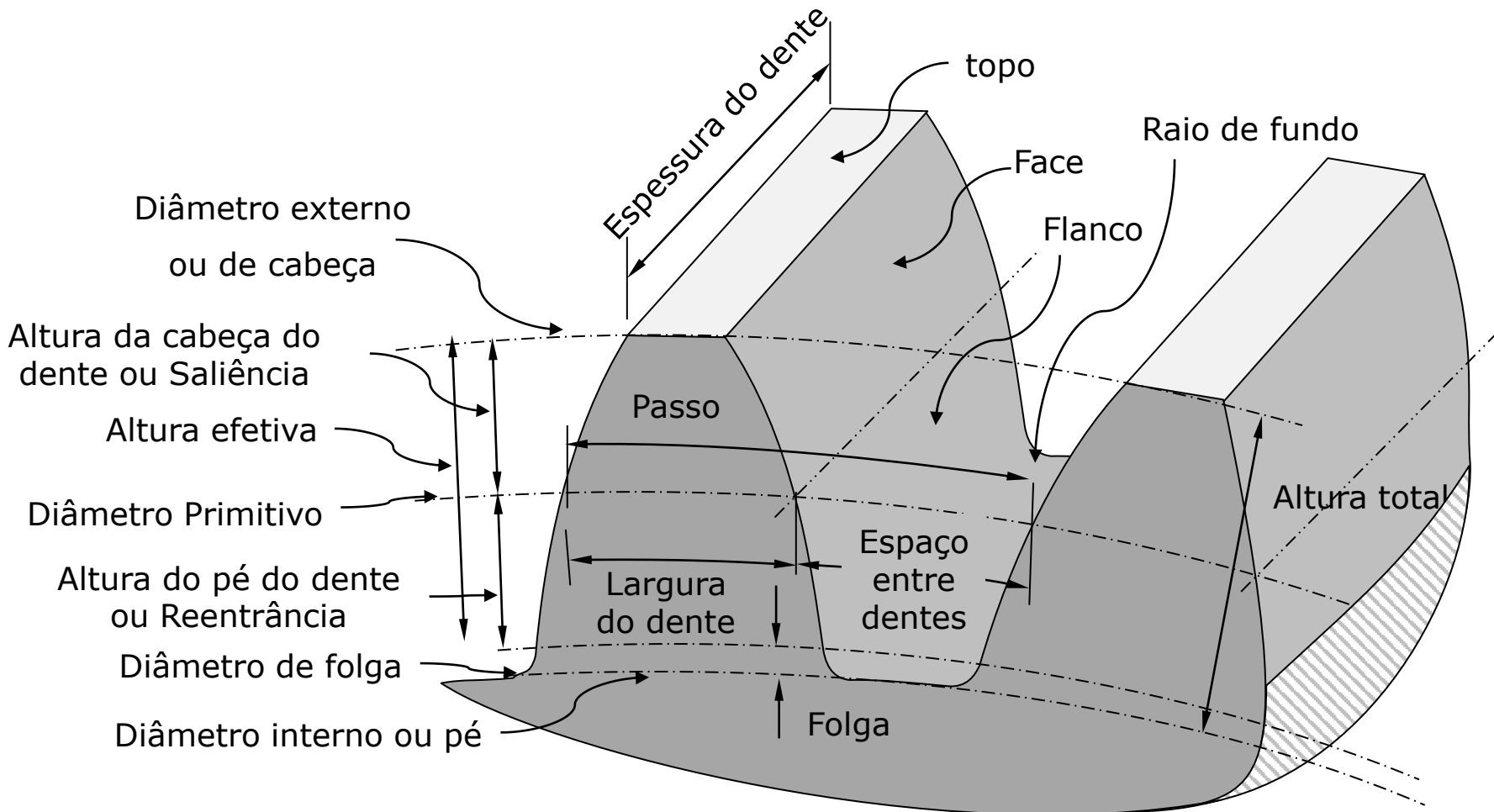


Pinhão e cremalheira



Terminologia de Engrenagens

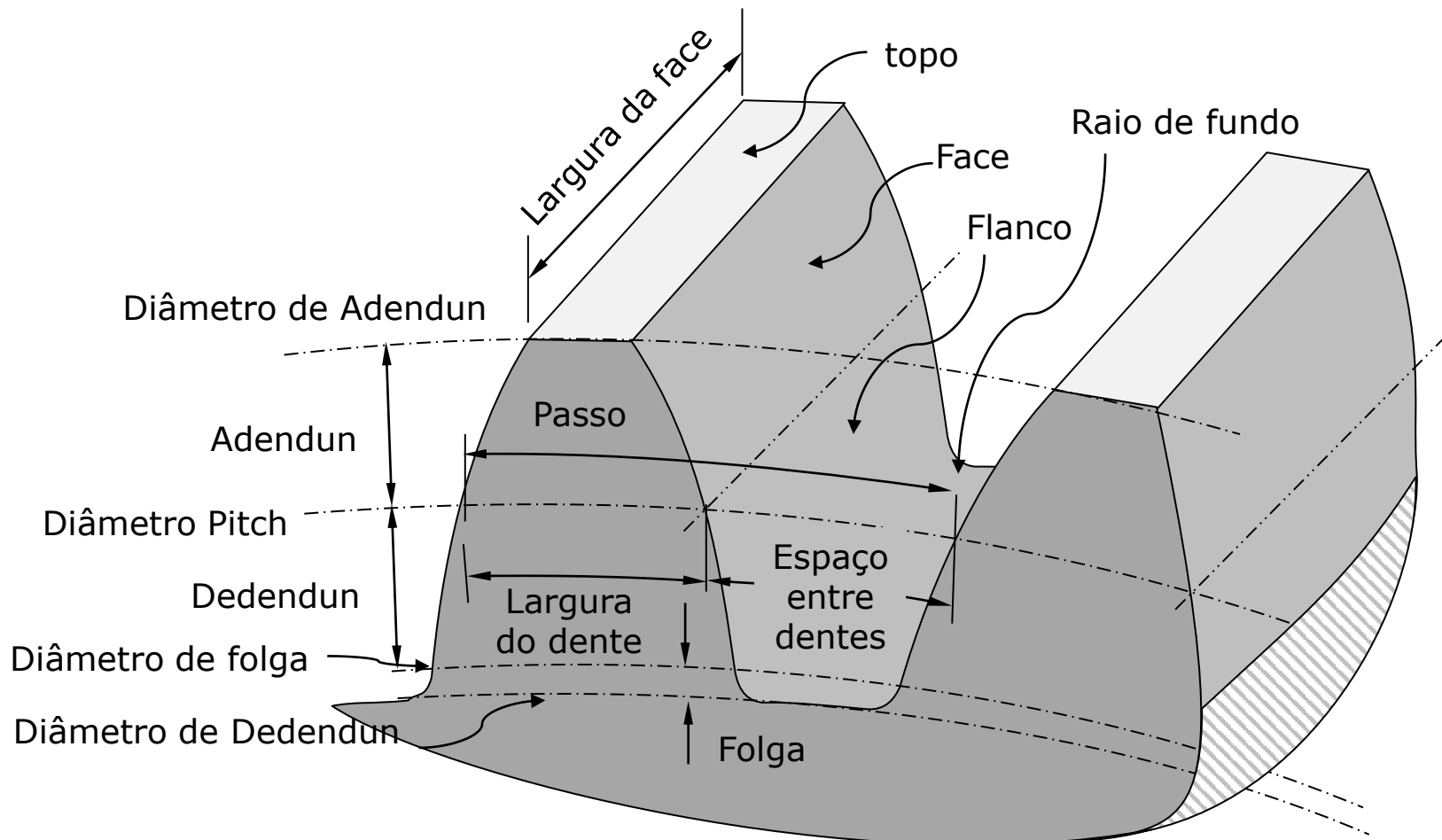
Engrenagens métricas





Terminologia de Engrenagens

Engrenagens em polegadas (Americanas/Imperiais)





Terminologia de Engrenagens

- ▶ **Circulo Primitivo (*Pitch circle*)** – é o circulo teórico, sobre o qual os cálculos são normalmente efetuados.
- ▶ **Diâmetro Primitivo (*pitch diameter*) d** – diâmetro do circulo primitivo.
- ▶ **Passo Primitivo (*circular pitch*) p** – é a distância, medida no circulo primitivo, de um ponto num dente, até ao ponto correspondente no dente adjacente. O passo primitivo é igual á soma da espessura do dente (*tooth thickness*) e intervalo entre dentes (*width of space*).
- ▶ **Módulo (*module*) m** – é a razão entre o diâmetro primitivo, “ d ” e o número de dentes, “ N ”. [$m = d/N$]
- ▶ ***Diametral Pitch* P** – é a razão entre o número de dentes da engrenagem - N e o diâmetro primitivo - d . [$P = N/d$]

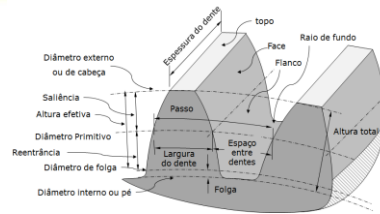


Terminologia de Engrenagens

- ▶ **Saliência (*addendum*) a** – é a distância radial entre a superfície da coroa (topland) e o diâmetro primitivo.
- ▶ **Reentrância (*dedendum*) b** – é a distância radial entre a superfície da raiz (bottomland) e o diâmetro primitivo.
- ▶ **Altura do dente (*whole depth*) ht** – é a soma da saliência e da reentrância.
- ▶ **Circulo de folga (*clearance circle*)** – é o círculo tangente ao círculo de saliência da engrenagem.
- ▶ **Folga (*clearance*) c** – é a saliência subtraída da reentrância.
- ▶ ***Backlash*** – é a quantidade que o intervalo entre dentes (*width of space*) excede a espessura do dente engrenado no círculo primitivo.

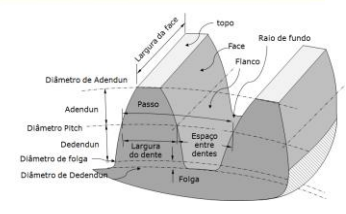


Terminologia de Engrenagens



Norma ISO

Número de dentes	Z
Módulo	m
Passo	t_0
Largura do dente	s_0
Espaço entre dentes	l_0
Diâmetro primitivo	d_0
Diâmetro entre centros	a_0
Altura comum do dente	h
Altura da cabeça do dente	h_k
Altura do pé do dente	h_f
Altura do dente	h_z
folga	S_k
Diâmetro externo	d_k
Diâmetro do pé do dente	d_f
Diâmetro de base	d_g
Ângulo de pressão	α_0
Relação de transmissão	i
passo na linha de engrenamento	t_e
Grau de recobrimento	ϵ



AGMA – Shigley

Número de dentes	N
Módulo	m
Circular pitch	p
Largura do dente	t
Espaço entre dentes	—
Diâmetro pitch	d
Diâmetro entre centros	C
Altura comum do dente	h
<i>Addendum</i>	a
<i>Dedendum</i>	b
Altura do dente	h_t
folga	c
Diâmetro de <i>addendum</i>	D_a
Diâmetro de raiz	D_R
Diâmetro de trabalho	D_K
Ângulo de pressão	ϕ
Relação de transmissão	i
passo na linha de engrenamento	$?$
Razão de contato	m_p



Conversões

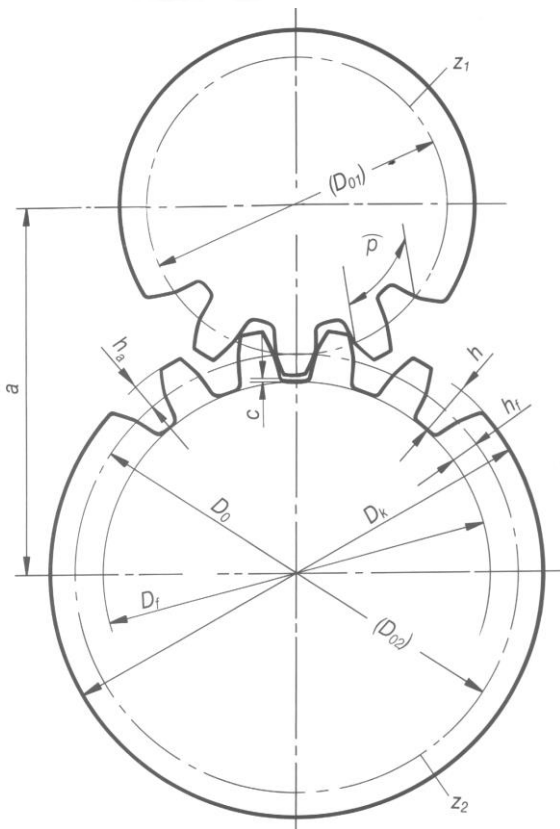
De	Para	Conversão
Módulo m	Diâmetro Pitch d	$d = m \cdot N$
Módulo m	Círculo Pitch p	$p = m \cdot \pi = (D/N) \cdot \pi$
Diâmetro Pitch d	Módulo m	$m = d/N = 24,5 / d$
Módulo e Diâmetro Pitch	Número de dentes N	$N = D/m$
Módulo m	Adendo a	$a = m$
Módulo m	Dedendo b	$b = 1,25 \cdot m$
Módulo, Dia. Pitch ou no. de dentes	Diâmetro externo d_e	$d_e = d + 2 \cdot m = m \cdot (N + 2)$
Módulo e Diâmetro Pitch	Diâmetro da raiz d_i	$d_i = d - 2 \cdot m$
Diâmetro Pitch e ângulo de pressão	Diâmetro do círculo base d_b	$\bar{d}_b = \bar{d} \cdot \cos \phi$
Módulo e ângulo de pressão	Pitch base P_b	$P_b = m \cdot \pi \cdot \cos \phi$
Módulo m	Espessura do dente t	$t = (\pi/2)/m$
Módulo e número de dentes	Distância entre centros	$C = m(N_1 + N_2)/2$
Raio externo, raio do círculo de base, distância entre centros e ângulo de pressão	Razão de contato	$m_p = \frac{\sqrt{R_{a1} - R_{b1}} + \sqrt{R_{b1} + R_{b2}} - C \cdot \sin \phi}{m \cdot \pi \cdot \cos \phi}$
Alteração na espessura do dente	Backlash linear	$B_{LA} = B \cdot \cos \phi$
Backlash linear no círculo Pitch	Backlash linear na linha de ação	$Ba = 6880 (B/D) \text{ (em minutos de arco)}$
Ângulo de pressão	Menor número de dentes	$N_c = \frac{2}{\sin^2 \phi}$



Leis do engrenamento



$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$



$$Z = \frac{d}{m} = \frac{D_a - 2m}{m}$$

módulo

$$p = \text{circular pitch} = \frac{\pi \cdot d}{Z}$$



Módulo

A norma DIN 780 P1 e P2 definem o perfil do dente e as dimensões da envolvente e **MÓDULOS (m) normalizados**

0,3 - 0,4 - 0,5 - 0,6 - 0,7 - 0,8 - 0,9

1,0 - 1,25 - 1,50 - 1,75

2,00 - 2,25 - 2,50 - 2,75

3,0 - 3,25 - 3,50 - 3,75

4,00 - 4,5

5,0 - 5,5

6,0 - 6,5

7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18

20 - 22 - 24 - 27 - 30 - 33 - 36 - 39 - 42 - 45

50 - 55 - 60 - 65 - 70 - 75

ÂNGULO DE PRESSÃO DO ENGRENAMENTO:

(ângulo de pressão do CORTADOR)

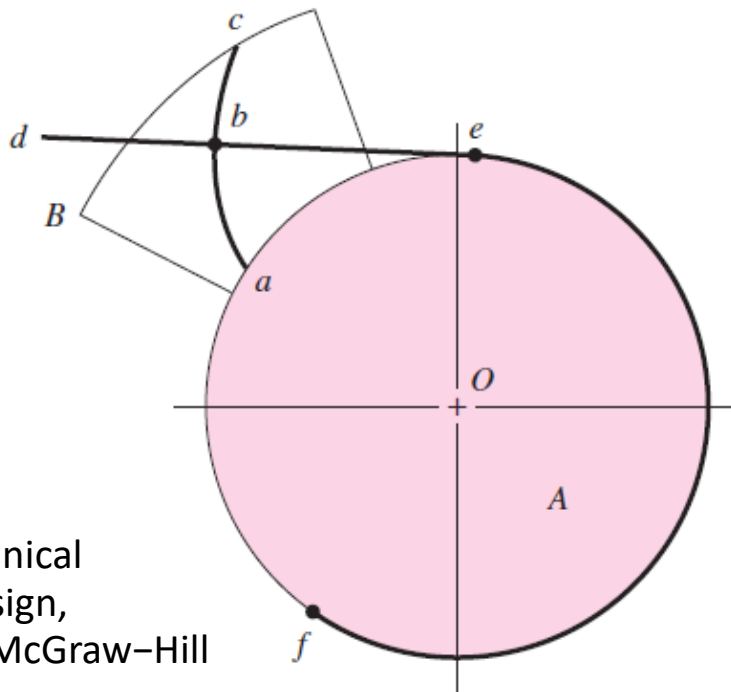
*14,5° - 17,5° - **20°** - 22,5° - 25°*



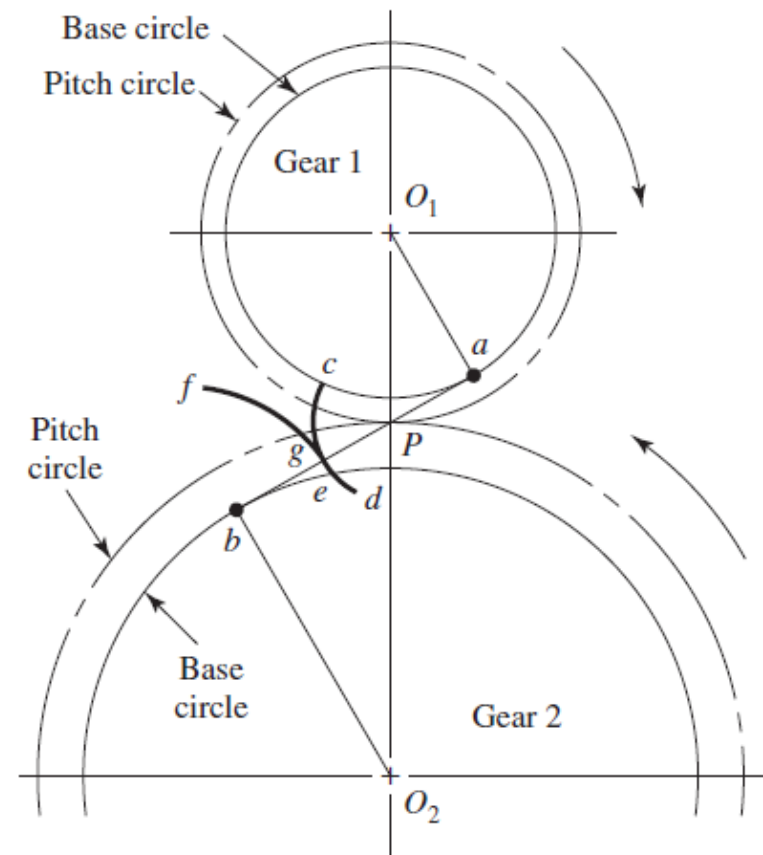
Perfil da envolvente

O projeto de engrenagens moderno está baseado no perfil da envolvente do dente

Geração da envolvente



Envolvente em ação





Perfil da envolvente

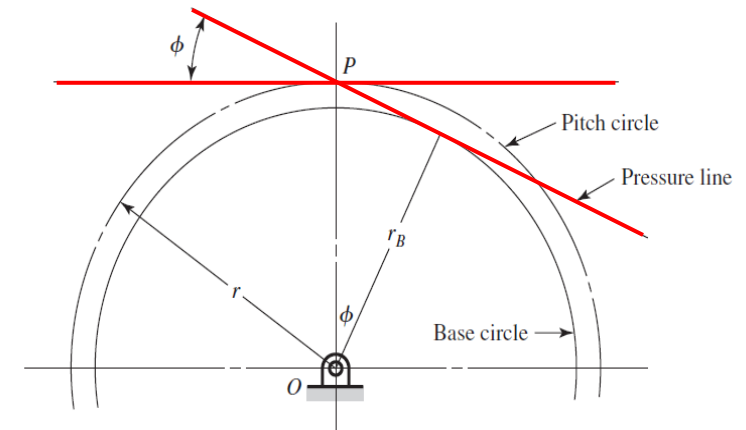
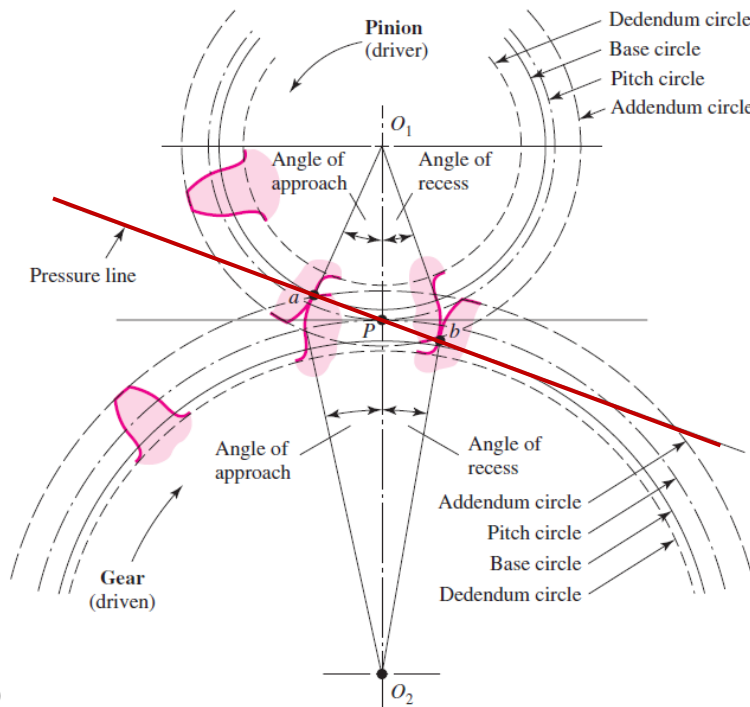
As três principais vantagens do uso de perfil envolvente são:

- ▶ o ação do par conjugado é independente de mudanças na distância entre centros
- ▶ A forma básica do dente pode ser feita com precisão, desde que com a ferramenta correta.
- ▶ Uma única ferramenta pode gerar todos os dentes mantendo o mesmo passo



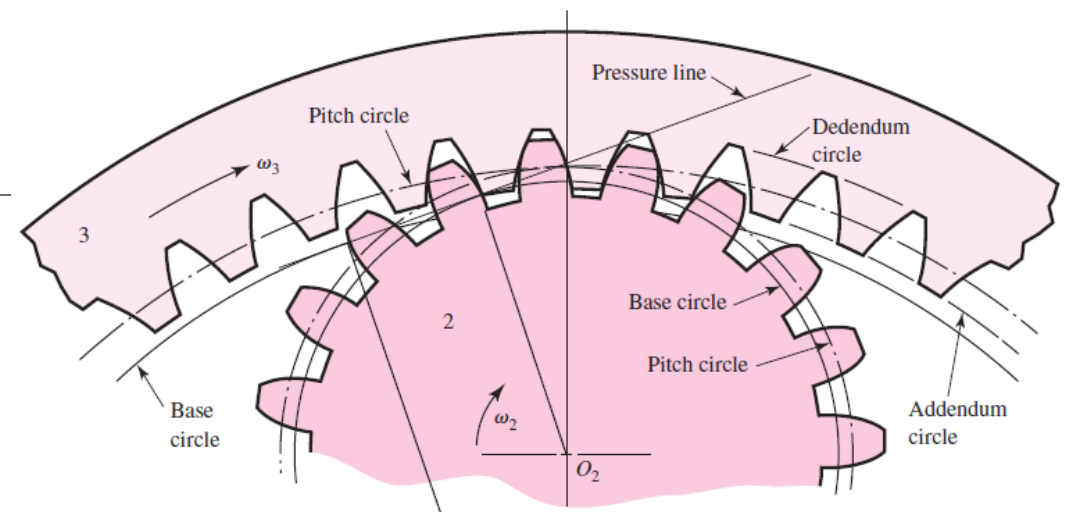
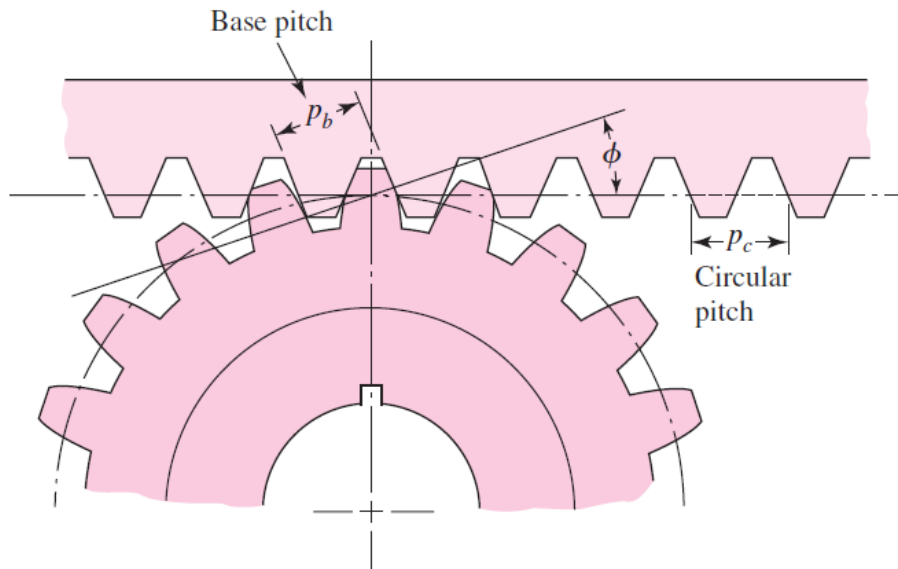
Ângulo de pressão

- ▶ Linha pressão ou de Engrenamento (*pressure line*) – Lugar geométrico dos pontos de contato de um par de dentes
- ▶ Linha de pressão (*pressure line*) representa a direção na qual a força resultante atua entre as engrenagens.
- ▶ O ângulo ϕ é denominado de ângulo de pressão, normalmente varia entre 20 e 25°.





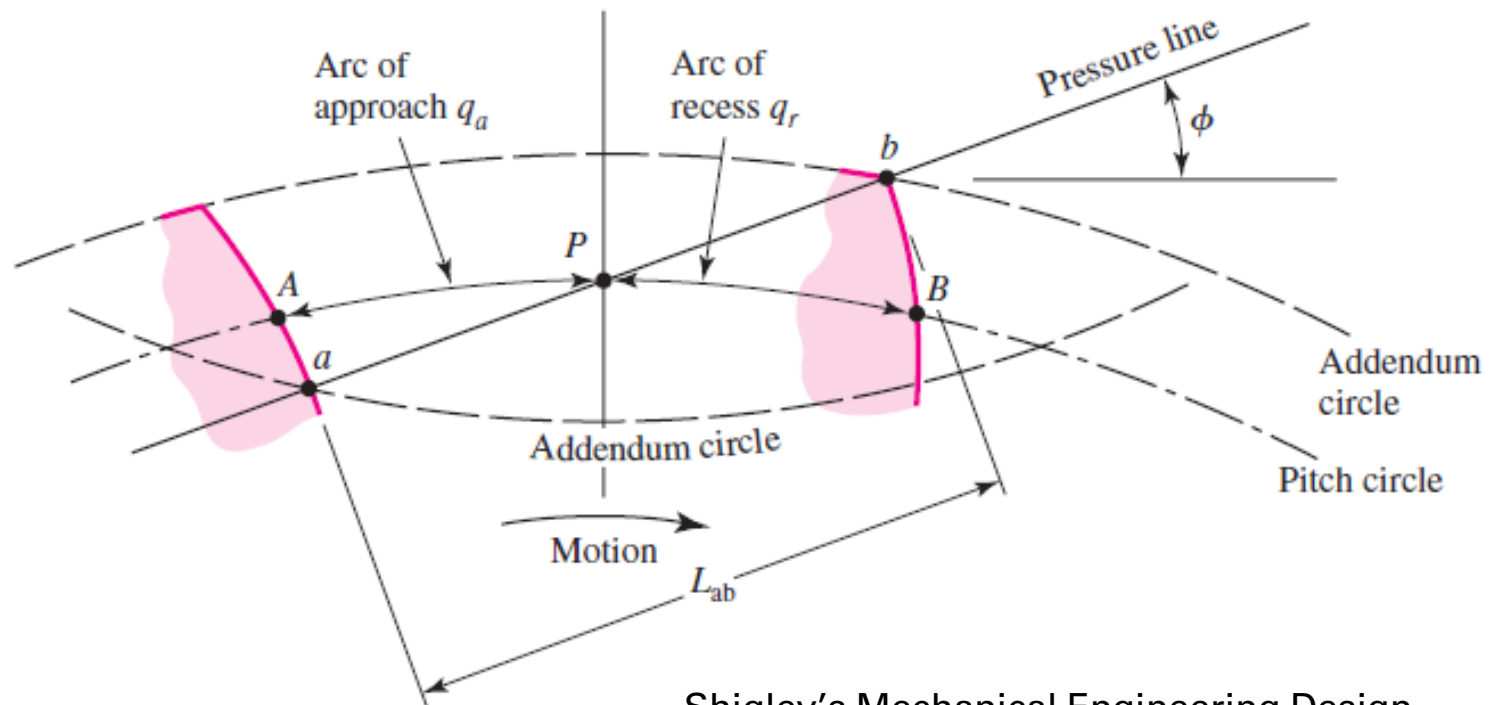
Ângulo de pressão





Razão de contato

- ▶ O contato dos dentes começa e termina na intersecção dos dois círculos diâmetro eterno (d_k) com a linha de pressão
- ▶ Supondo que essa razão seja 20% maior ($q_t = 1,2.p$) isso implica que quando um par de dentes estiver iniciando o contato em a , outro par ainda estará em contato sem ter atingido o ponto b
- ▶ Por um instante teremos dois pares de dentes em contato





Razão de contato

- ▶ Devido a natureza da ação do dente com um ou dois pares em contato simultâneos é definida a razão de contato m_p .
- ▶ A razão de contato m_p é definida como o número médio de pares de dentes em contato

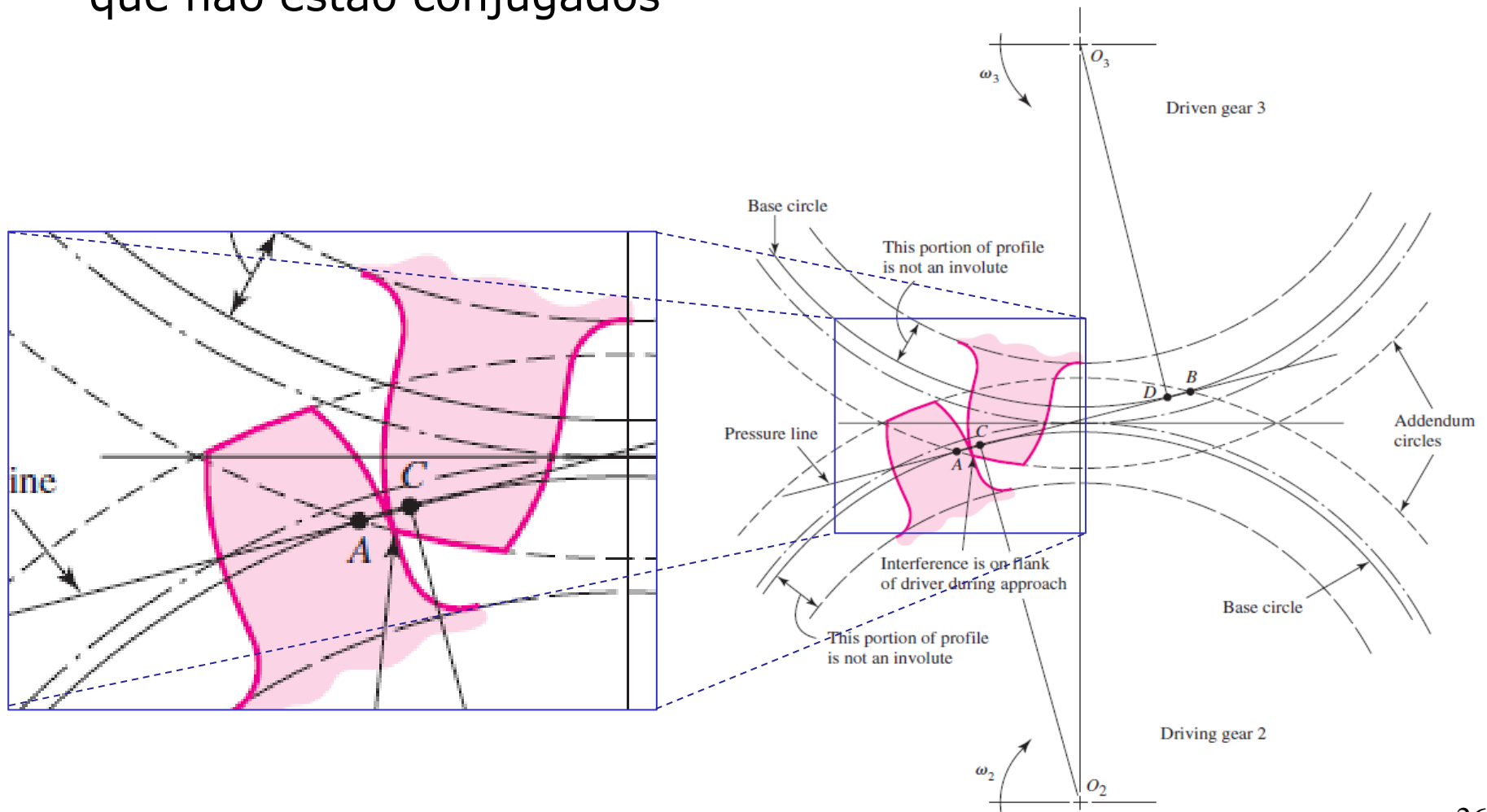
$$m_p = \frac{q_t}{P}$$

- ▶ Não se recomenda valores de m_p inferiores a 1.2, devido ao erros de montagem e o problema de barulho



Interferência

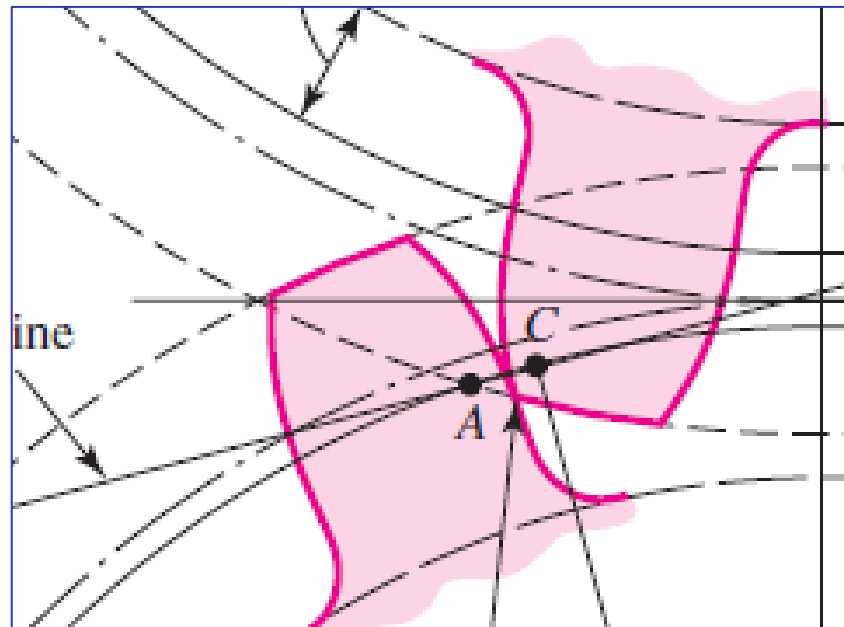
- ▶ Interferência é definida como o contato de partes do dente que não estão conjugados





Interferência

- ▶ O perigo da existência da interferência aumenta com o aumento do número de dentes da engrenagem
- ▶ Se houver interferências com folga grande entre os dentes, o contato ocorrerá em péssimas condições, gerando vibrações importantes e desgaste rápido
- ▶ Se a folga for zero, ocorrerá o 'engripamento' da transmissão





Interferência

- ▶ Número mínimo de dentes para evitar problemas de interferência

NUMBER OF PINION TEETH, N_p	NUMBER OF GEAR TEETH, N_g							
	HELIX ANGLE ψ , deg							
	0	5	10	15	20	25	30	35
8								12
9							12	34
10						12	26	∞
11					13	23	93	
12			12	16	24	57	∞	
13	16	17	20	27	50			
14	26	27	34	53	207			
15	45	49	69	181	∞			
16	101	121	287	∞				
17		∞	∞					



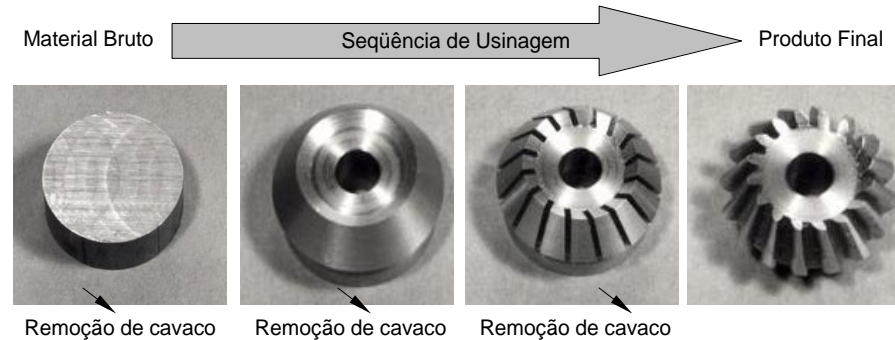
Materiais para engrenagens

- ▶ **Ferro Fundido:** Menos ruído do as engrenagens de aço inox. Alta resistência à flexão. Boa resistência ao desgaste. Baixo custo.
- ▶ **Aços:** vários
- ▶ **Alumínio:** aplicações simples
- ▶ **Bronze:** Material não ferroso.
- ▶ **Polímeros:** *Nylon*–Resistência ao desgaste. Baixo coeficiente de atrito. Baixo ruído. Não necessitam de lubrificação quando a baixas cargas.



Fabricação de engrenagens

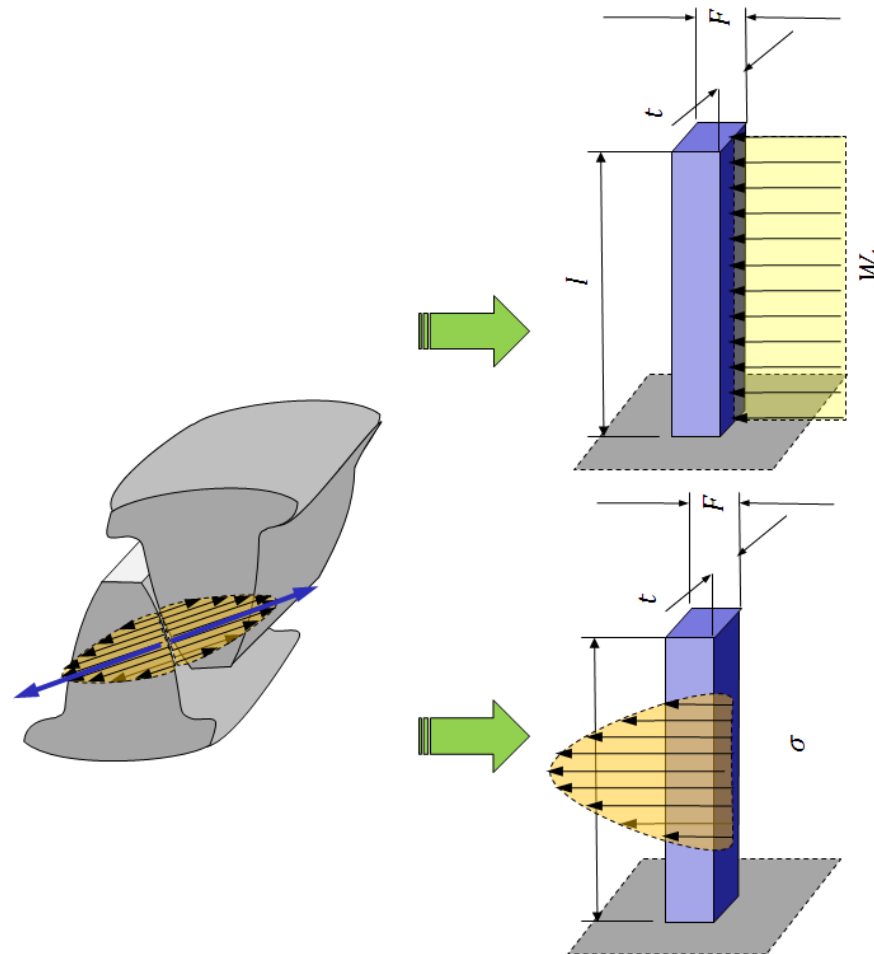
- ▶ *Fundidas*
- ▶ *Usinadas:*
 - *Fresa módulo*
 - *Geração*
- ▶ *Forjamento*
- ▶ *Metalurgia do pó - sinterização*
- ▶ *Injeção*
 - *de polímeros*
 - *em metal*
- ▶ *Prototipagem rápida – impressão 3D*
- ▶ *Estampagem*





Dimensionamento de Engrenagens

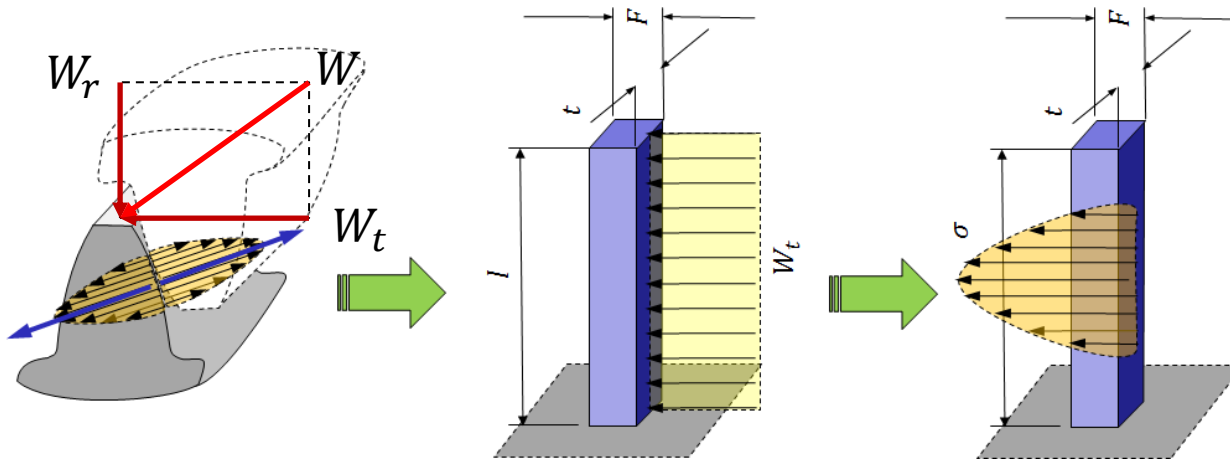
- ▶ Um dente de engrenagem deve ser analisado sob o ponto de vista dos esforços de flexão, fadiga e das tensões de contato



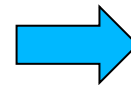


Equação de Lewis para flexão

- ▶ Wilfred Lewis (1892) desenvolveu uma equação para estimar a tensão em um dente de engrenagem
- ▶ É a equação base no projeto de engrenagens

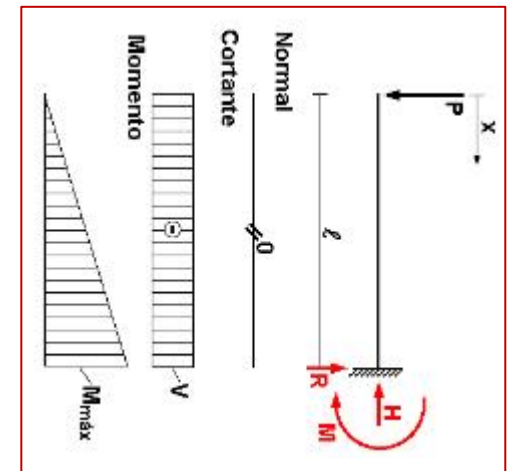


$$\sigma = \frac{M}{(I/C)}$$



$$\sigma = \frac{6 W_t l}{F t^2}$$

Relembrando!



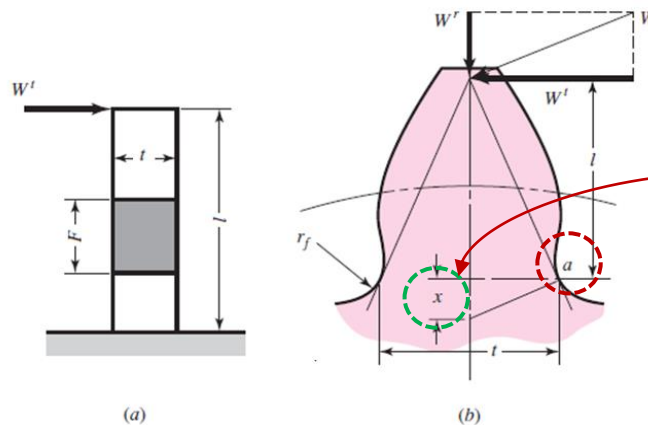
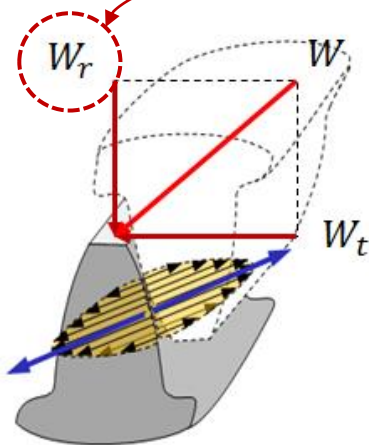


Equação de Lewis para flexão

▶ Equação de Lewis:
$$\sigma = \frac{W_t P}{F Y}$$

▶ Onde:
$$Y = \frac{2x P}{3}$$
 ▶ *Y – Fator de forma da Lewis*

Isto significa que somente a flexão do dente é considerada, a compressão resultante da decomposição da força de contato é desprezada



$$x = \frac{t^2}{4l}$$



Equação de Lewis para flexão

- ▶ Valores do fator forma de Lewis para um ângulo de contato de 20°, no diâmetro pitch.

$$\sigma = \frac{W_t P}{F Y}$$

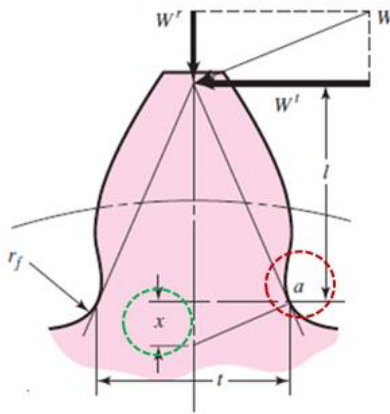
Number of Teeth	Y	Number of Teeth	Y
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	Rack	0.485



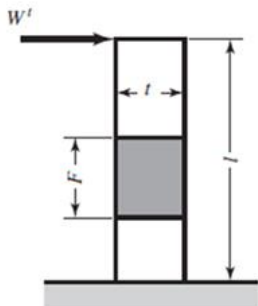
Equação de Lewis para flexão

- ▶ Considerações sobre a Equação de Lewis:

$$\sigma = \frac{W_t P}{F Y}$$



(b)



(a)

- ▶ O uso da equação de Lewis implica em considerar que o dente não compartilha o carregamento e que a máxima força é exercida no fim do dente
- ▶ Como a razão de contato pode ser maior do que 1, cerca de 1.5, é desconsiderado o efeito de distribuição do carregamento
- ▶ Mesmo que a engrenagem seja perfeitamente fabricada, assumir que o carregamento máximo ocorre na parte superior do dente é ser conservativo, pois mais de um dente deve estar em contato, reduzindo o carregamento.
- ▶ O exame do engrenamento revela que o carregamento ocorre no meio do dente
- ▶ A pior condição ocorre quando somente um par engrenado transmite todo o carregamento



Efeito dinâmico

- ▶ O carregamento no engrenamento é um problema dinâmico, é torna-se crítico em médias e altas velocidades.
- ▶ Ele representa a relação entre a falha de uma engrenagem e a velocidade pitch, atuando sob mesmo carregamento
- ▶ As normas ANSI/AGMA 2001-D04 e 2101-D04 definem o fator dinâmico como sendo maior do que 1.
- ▶ *Barth* acrescenta um fator de correção dinâmica (K_v) a equação de Lewis

$$\sigma = \frac{W_t P}{F Y} \quad \rightarrow \quad \sigma = K_v \frac{W_t P}{F Y}$$

Onde: \Rightarrow m = módulo,
 \Rightarrow F = largura do dente em mm
 \Rightarrow Wt = carregamento tangencial em MPa

$$\sigma = K_v \frac{W_t P}{F Y} \quad \blacktriangleright \quad \text{Para sistema americano}$$
$$\sigma = K_v \frac{W_t}{F m Y} \quad \blacktriangleright \quad \text{Para sistema métrico}$$



Efeito dinâmico

- ▶ fator de correção dinâmica (K_v) (sistema métrico)

$$K_v = \frac{3,05 + V}{3,05}$$

- ▶ Para engrenagens de fofo com perfil de dentes fundidos

$$K_v = \frac{6,01 + V}{6,01}$$

- ▶ Para engrenagens com perfil de dentes fresados

$$K_v = \frac{3,56 + \sqrt{V}}{3,56}$$

- ▶ Para engrenagens com perfil de dentes gerados

$$K_v = \sqrt{\frac{5,56 + \sqrt{V}}{5,56}}$$

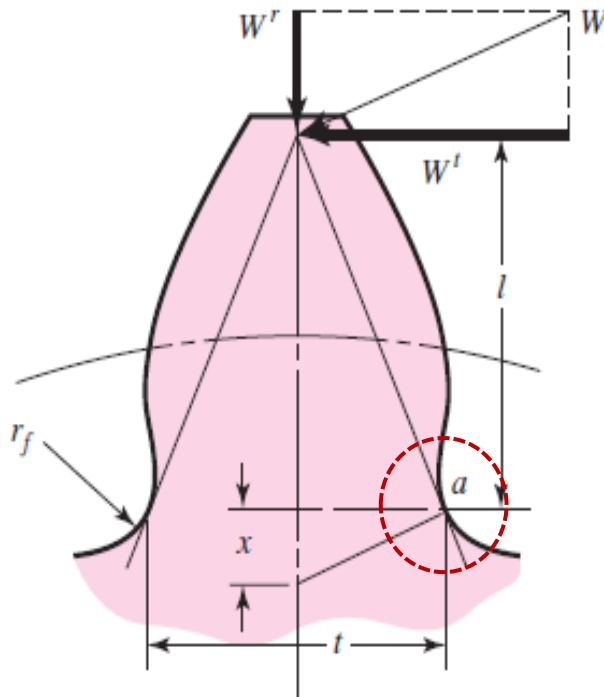
- ▶ Para engrenagens com perfil de dentes gerados e retificados

- ▶ **V (m/s)**



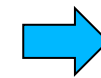
Equação AGMA

- A AGMA inicia a alteração da equação de Lewis/Barth introduzindo um fator de concentração de K_f é dado por:



$$k_f = H + \left(\frac{t}{r}\right)^L \left(\frac{t}{l}\right)^M$$

$$\sigma = K_v \frac{W_t}{F m Y}$$



$$\sigma = K_f K_v \frac{W_t}{F m Y}$$

Onde:

$$\Rightarrow H = 0,340 - 0,458 366 2 \emptyset$$

$$\Rightarrow L = 0,316 - 0,458 366 2 \emptyset$$

$$\Rightarrow M = 0,290 - 0,458 366 2 \emptyset$$

$$\Rightarrow r = \frac{(b-r_f)^2}{(d/2)+b-r_f}$$



Equação AGMA

- As equações de Lewis/Barth são a base do sistema AGMA

$$\sigma = K_v \frac{W_t P}{F Y}$$

$$\sigma = K_v \frac{W_t}{F m Y}$$

- ▶ A metodologia AGMA utiliza duas equações de tensão

tensões de deformação

$$\sigma = W_t K_o K_v K_s \frac{P_d K_m K_b}{F J}$$

$$\sigma = W_t K_o K_v K_s \frac{1}{b m_t} \frac{K_H K_B}{Y_j}$$

tensões de contato

$$\sigma_c = C_p \sqrt{W_t K_o K_v K_s \frac{K_m C_f}{d_p F l}}$$

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{W_t K_o K_v K_s \frac{K_H Z_R}{d_{w_1} b Z_l}}$$

▶ Unidades Americanas

▶ **Sistema métrico**



Equação AGMA de tensão

- ▶ Na metodologia AGMA a equação de Lewis/Barth são corrigidas por uma série de fatores que procuram considerar todas as possíveis causas de falha de uma engrenagem.

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para *flexão*

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico



Equação AGMA de tensão

- ▶ Equação para tensão de flexão admissível

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

$$\sigma_{all} = \frac{S_t}{S_f} \frac{Y_n}{Y_\theta Y_Z}$$

$$\sigma_{total} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{(K_T K_R)}$$

- ▶ Sistema métrico

Onde:

- ▶ **S_t** tensão de flexão permitível (N/mm²)
- ▶ **Y_N** Fator do ciclo de tensão para tensão de dobramento
- ▶ **K_T** ou Y_θ fator de temperatura
- ▶ **K_R** ou Y_Z fator de confiabilidade
- ▶ **S_F** fator de segurança AGMA



Equação AGMA de tensão

- ▶ Condição de falha para tensão/deformação

$$\sigma_{mat} < \sigma_{total}$$

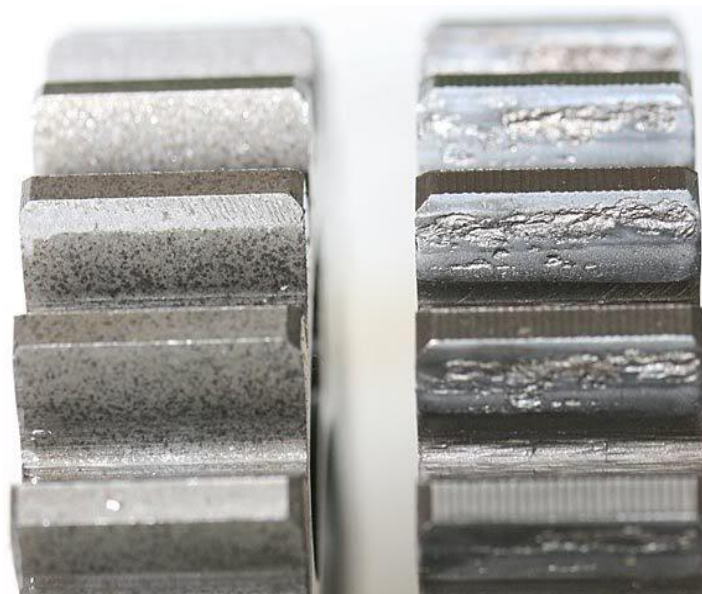
$$\sigma_{total} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{(K_T K_R)}$$



Equação AGMA de contato

Durabilidade da superfície

- ▶ Um dos modos de falha de engrenagens está relacionado a fadiga superficial dos dentes, *pitting*.
- ▶ Este é formado pela ação cíclica das tensões de contato que geram fadiga de contato





Equação AGMA de contato

- ▶ Na metodologia AGMA a equação de Lewis/Barth são corrigidas por uma série de fatores que procuram considerar todas as possíveis causas de falha de uma engrenagem.

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de superfície

Fator resistência para *pitting*

Espessura do dente

Diâmetro *pitch* do pinhão

Fator de distribuição de carga

Fator de resistência a flexão

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico

Coeficiente elástico



Equação AGMA de tensão

- ▶ Equação para tensão de contato admissível

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

$$\sigma_{c_{all}} = \frac{S_C Z_n Z_w}{S_H Y_\theta Y_Z}$$

$$\sigma_{c_{total}} = \frac{S_C Z_N C_H}{S_H (K_T K_R)}$$

▶ Sistema métrico

Onde:

- ▶ S_C = tensão de contato admissível (N/mm²)
- ▶ Z_N = Fator do ciclo de tensão
- ▶ K_T ou Y_θ fator de temperatura
- ▶ K_R ou Y_Z fator de confiabilidade
- ▶ S_H = fator de segurança AGMA



Equação AGMA de contato

- ▶ Condição de falha para fadiga de contato

$$\sigma_{mat} < \sigma_{c_{total}}$$

$$\sigma_{c_{total}} = \frac{S_c}{S_H} \frac{Z_N C_H}{(K_T K_R)}$$



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator dinâmico - k_v

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para *flexão*

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico



Fator Dinâmico K_v

- ▶ O fator dinâmico tenta compensar erros de manufatura e operação
- ▶ Os principais erros observados são:
 - Erros geométricos e dimensionais nos dentes resultantes da fabricação
 - Vibração do dente durante o engrenamento devido a sua rigidez
 - Intensidade da velocidade na linha de pitch
 - Desbalanceamento do elementos em rotação
 - Desgaste e deformação plástica na face de contato
 - Desalinhamentos lineares e angulares, resultantes da flexão dos eixos
 - Atrito nos dentes



Fator Dinâmico K_v

- ▶ Para compensar estes erros a AGMA definiu graus de qualidade (*quality numbers*)
- ▶ Estes definem as tolerâncias para engrenagens de diversos tamanhos
- ▶ Graus de 3 a 7 – engrenagens comerciais
- ▶ Graus de 8 a 12 - engrenagens de precisão



Fator Dinâmico K_v

- ▶ Equações para o fator dinâmico:

$$K_v = \left(\frac{A + \sqrt{200V}}{A} \right)^B$$

▶ **Sistema métrico**

$$A = 50 + 56(1 - B)$$

$$B = 0,25 + 56(12 - Q_v)^{2/3}$$

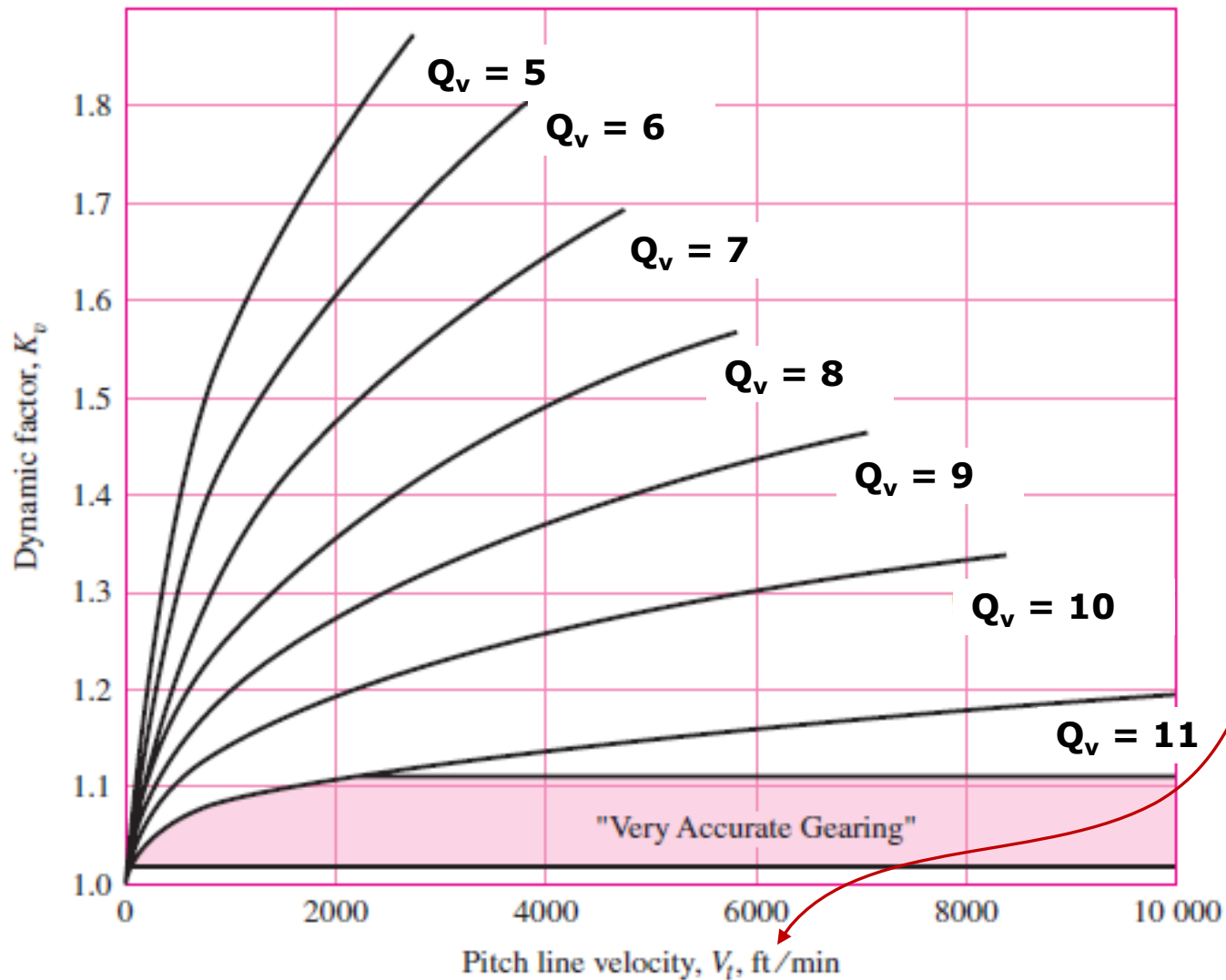
- ▶ Onde:

$$V_{tmax} = \frac{(A + (Q_v - 3))^2}{200}$$

▶ **Sistema métrico**



Fator Dinâmico K_v

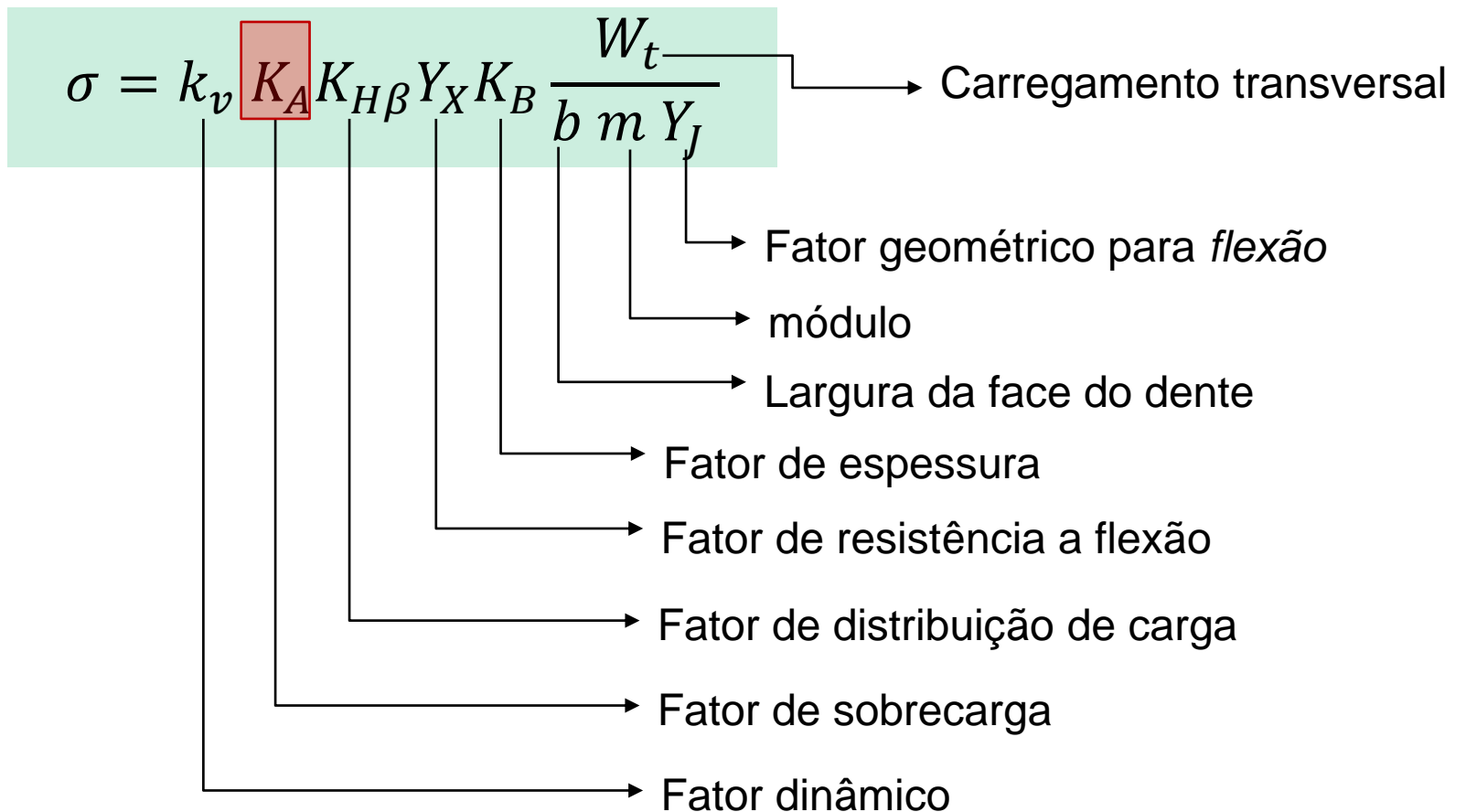


Cuidado com a unidade



Equação AGMA de tensão/deformação

► Fator de sobrecarga





Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de sobrecarga - $K_A = K_o$

Table of Overload Factors, $K_A = K_o$

Driven Machine

Power source	Uniform	Moderate shock	Heavy shock
Uniform	1.00	1.25	1.75
Light shock	1.25	1.50	2.00
Medium shock	1.50	1.75	2.25



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga

$$\sigma = k_v K_A K_{H\beta} Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para *flexão*

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

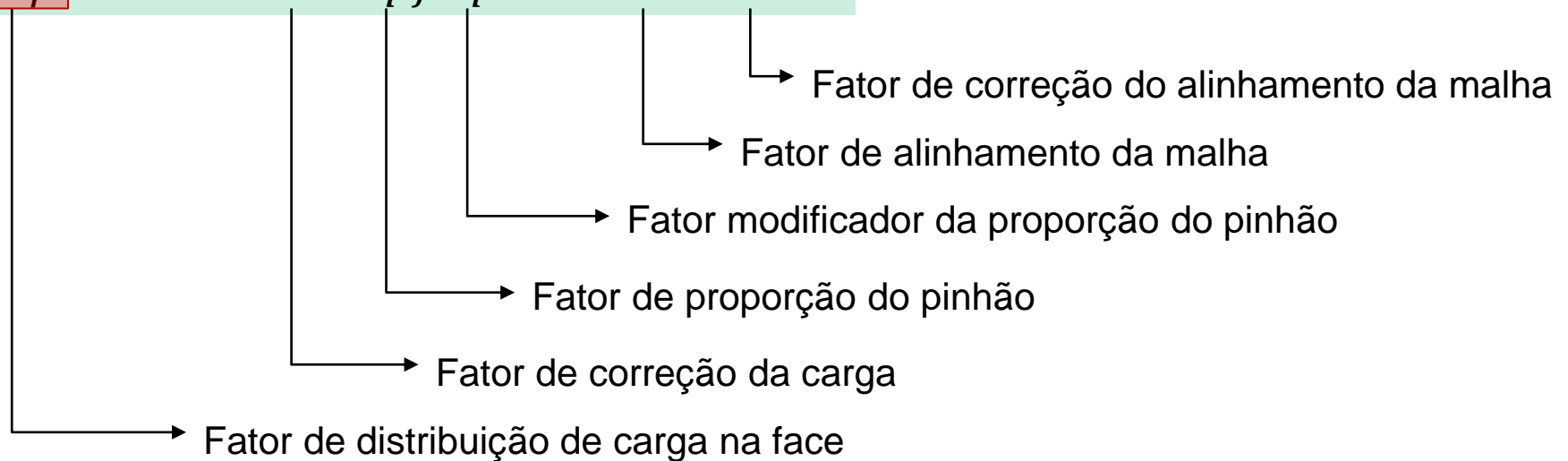
Fator dinâmico



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$



- ▶ O fator de distribuição de carga modifica as equações de tensões de forma a refletir uma distribuição não uniforme ao longo da linha de contato.



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc} (C_{pf} C_{pm} + C_{ma} C_e)$$

→ Fator de correção da carga

$$C_{mc} = \begin{cases} 1 & \text{for uncrowned teeth} \\ 0.8 & \text{for crowned teeth} \end{cases}$$

Definido no projeto



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

→ Fator de proporção do pinhão

$$C_{pf} = \begin{cases} \frac{b}{10d} - 0,0025 & b \leq 25,4 \text{ mm (1 pol.)} \\ \frac{b}{10d} - 0,0375 + 0,0125b & 25,4 < b \leq 431,8 \text{ mm (17 pol.)} \\ \frac{b}{10d} - 0,1109 + 0,0207b - 0,000228 b^2 & 431,8 < b \leq 1.016 \text{ mm (40 pol.)} \end{cases}$$

onde: b = largura da face do dente
 d = espessura da engrenagem

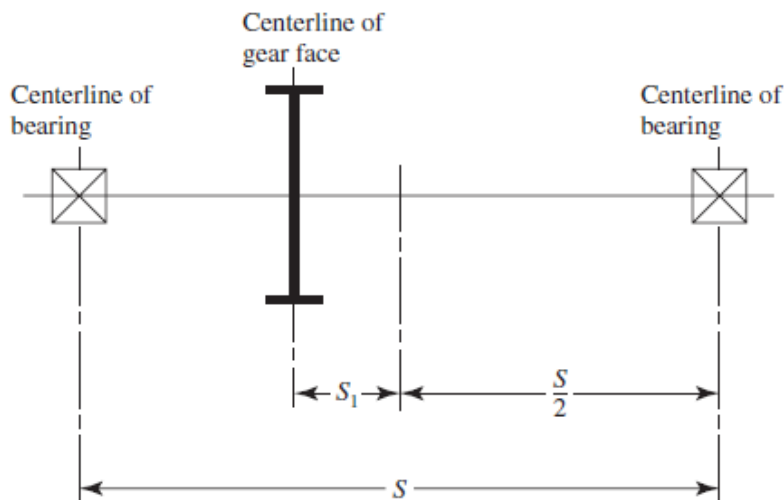


Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

Fator modificador da proporção do pinhão



Fator modificador da proporção do pinhão

Como a engrenagem está montada no eixo

$$C_{pm} = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \frac{s_1}{s} < 0,175 \\ 1,1 & \Rightarrow \frac{s_1}{s} \geq 0,175 \end{cases}$$



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

Fator de alinhamento da malha

$$C_{ma} = A + B F + C F^2$$

Onde **F** é a largura da face do dente em polegadas

Condition	A	B	C
Open gearing	0.247	0.0167	$-0.765(10^{-4})$
Commercial, enclosed units	0.127	0.0158	$-0.930(10^{-4})$
Precision, enclosed units	0.0675	0.0128	$-0.926(10^{-4})$
Extraprecision enclosed gear units	0.00360	0.0102	$-0.822(10^{-4})$

*See ANSI/AGMA 2101-D04, pp. 20–22, for SI formulation.

$$C_{ma} = A + B \left(\frac{b}{25,4} \right) + C \left(\frac{b}{25,4} \right)^2$$

Onde **b** é a largura da face do dente em milímetros

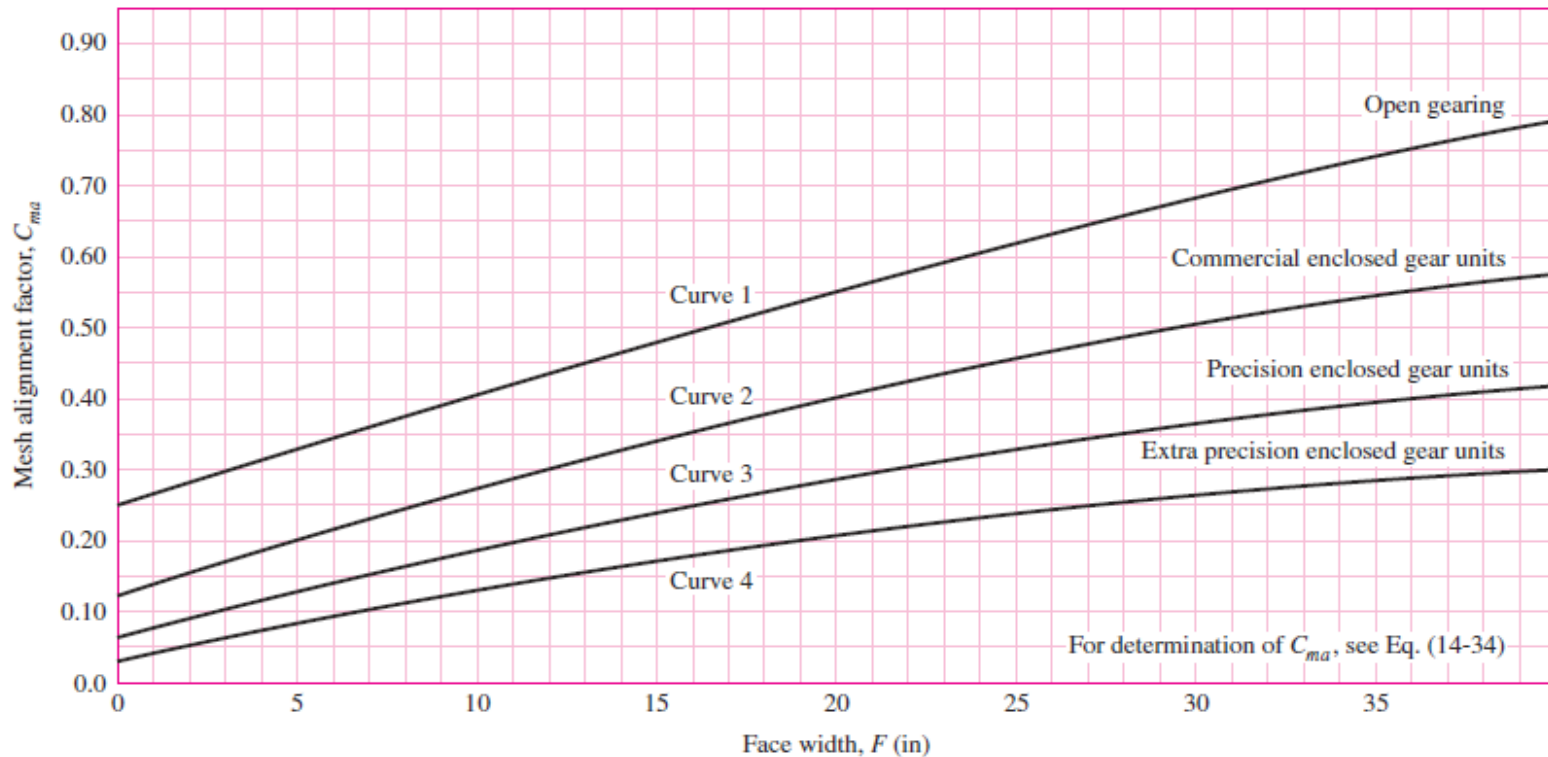


Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

Fator de alinhamento da malha





Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga - $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

→ Fator de correção do alinhamento da malha

$$C_e = \begin{cases} 0,8 & \Rightarrow \text{para engrenagens ajustadas na montagem, e ou ajustadas por lapidação} \\ 1 & \Rightarrow \text{para qualquer outra condição} \end{cases}$$

$$K_{H\beta} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de distribuição de carga

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para *flexão*

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de espessura - Y_X ou K_S

$$K_S = Y_X = 1,192 \left(\frac{b\sqrt{Y}}{P} \right)^{0,0535}$$

$K_S = Y_X = 1$ por recomendação da norma AGMA



Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de espessura - K_B

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para *flexão*

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico

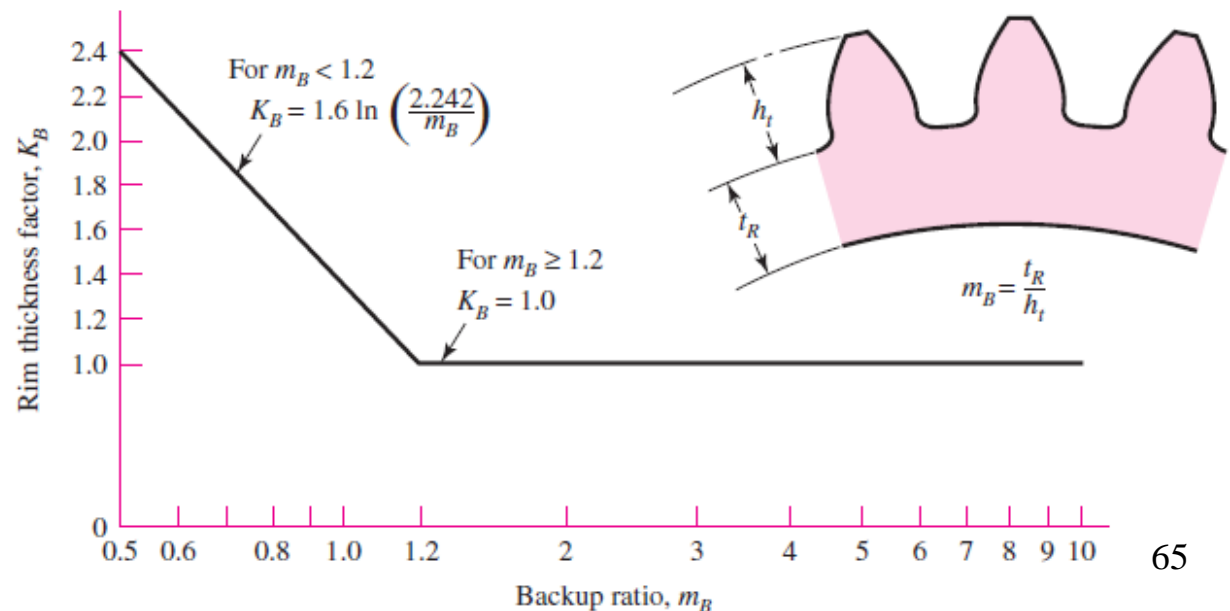


Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator de espessura - K_B
- ▶ O Fator de espessura da curvatura - K_B , ajusta as estimativas da tensão de dobramento (flexão) para engrenagens de espessuras curvatura fina.

- ▶ O fator K_B depende do fator m_B : $m_B = \frac{t_R}{h_t}$

$$K_B = \begin{cases} 1.6 \ln \frac{2.242}{m_B} & m_B < 1.2 \\ 1 & m_B \geq 1.2 \end{cases}$$





Equação AGMA de tensão/deformação

- ▶ Fator geométrico para flexão - Y_J

$$\sigma = k_v K_A K_H \beta Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Carregamento transversal

Fator geométrico para flexão

módulo

Largura da face do dente

Fator de espessura

Fator de resistência a flexão

Fator de distribuição de carga

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico



Equação AGMA de tensão/deformação

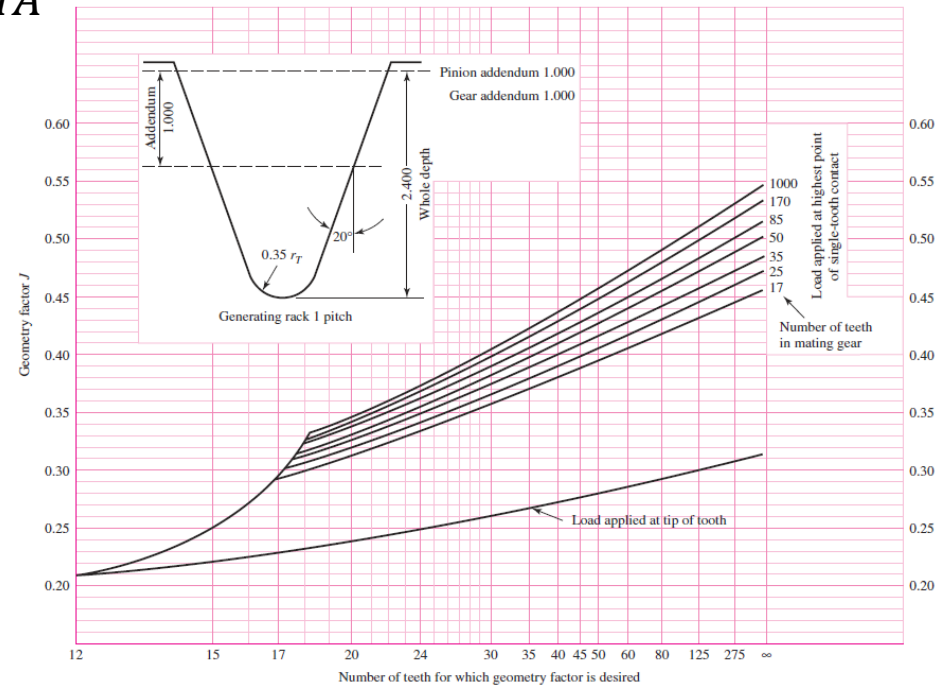
- Fator geométrico para flexão - Y_J

$Y =$ Fator de forma AGMA

$$Y_J = \frac{Y}{K_f m_N}$$

$$m_N = \frac{p_N}{0,95 Z}$$

$K_f =$ Fator de correção de tensão





Fatores geométricos I e J

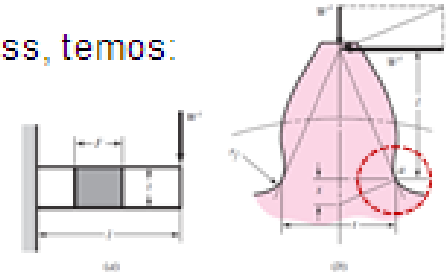
- ▶ A equação de Lewis introduz um fator geométrico Y relativo a geometria do dente

Equação de Lewis

- ▶ Assumindo que a é o ponto de máximo stress, temos:

$$\sigma = \frac{W_t}{F p y}$$

$$x = \frac{t^2}{4l}$$



- ▶ Como: $P = \frac{\pi}{p}$ e $Y = y \cdot \pi$

- ▶ Com P = diâmetro pitch

- ▶ Substituindo temos: $\sigma = \frac{W_t P}{F Y}$

- ▶ Onde: $Y = \frac{2x P}{3}$

- ▶ Isto significa que somente a flexão do dente é considerada, e a compressão resultante da decomposição da força de contato é desprezada



Fatores geométricos I e J

- ▶ A determinação dos fatores geométricos I e J depende da razão de contato na face m_F , definido como:

$$m_F = \frac{F}{P_X}$$

Onde:

- ▶ F = Largura do dente
- ▶ P_X = pitch axial
- ▶ Para engrenagens de dentes retos $M_F = 0$



Fatores geométricos I e J

- ▶ Fator de geométrico J de resistência ao dobramento :

$$J = \frac{Y}{K_f m_N}$$

Onde:

- ▶ m_N = razão de carregamento
 - ▶ K_f = fator de correção de tensão AGMA
- ▶ O fator AGMA é empregado para modificar os valores do fator de forma da equação de forma
 - ▶ *Atenção esse Y não é o mesmo fator de forma da equação de Lewis*



Fatores geométricos I e J

- ▶ m_N = razão de carregamento:

$$m_N = \frac{P_N}{0,95 Z}$$

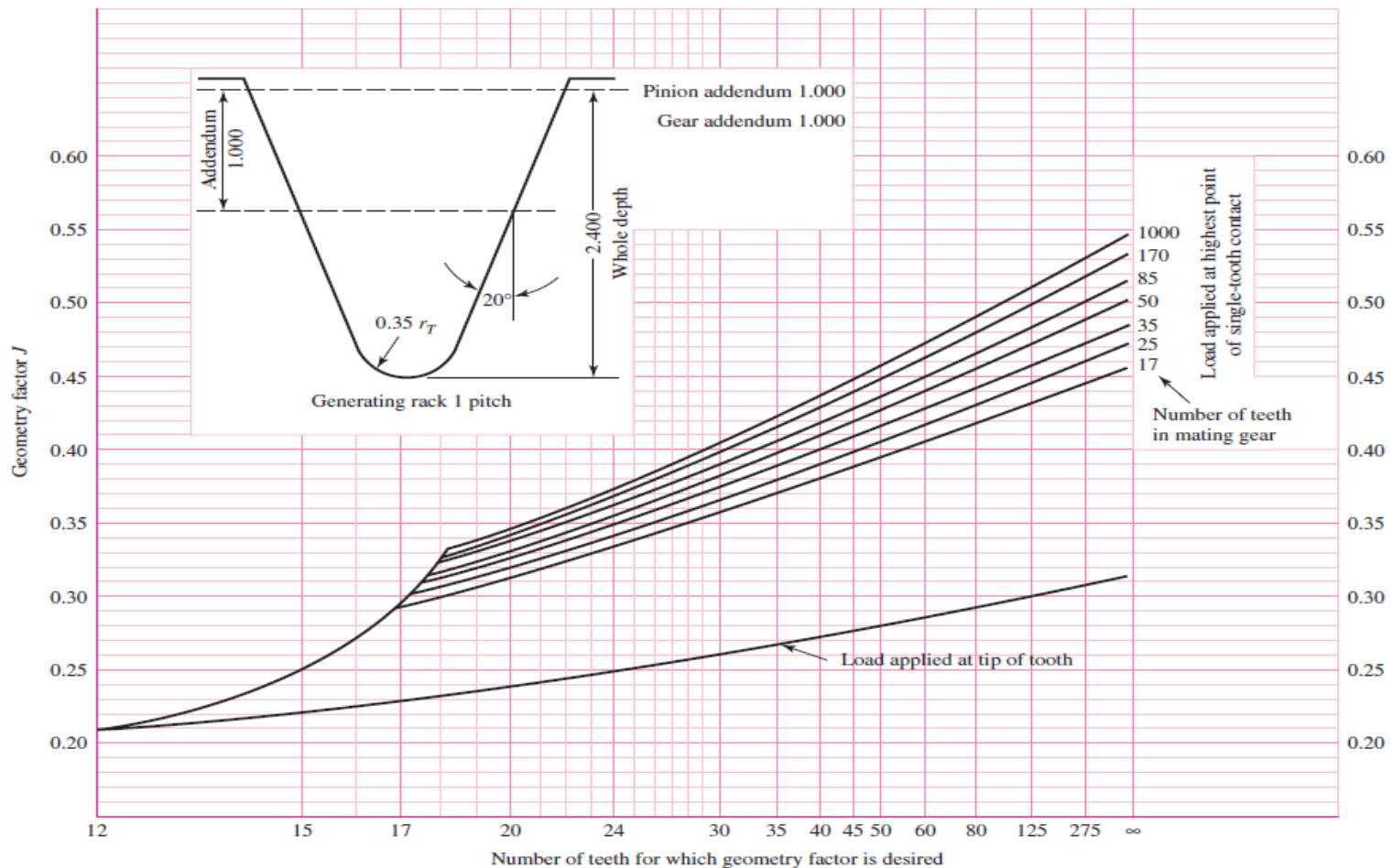
- ▶ Onde:

- P_N = Pitch normal a base
- Z = comprimento da linha de ação no plano transversal



Fatores geométricos I e J

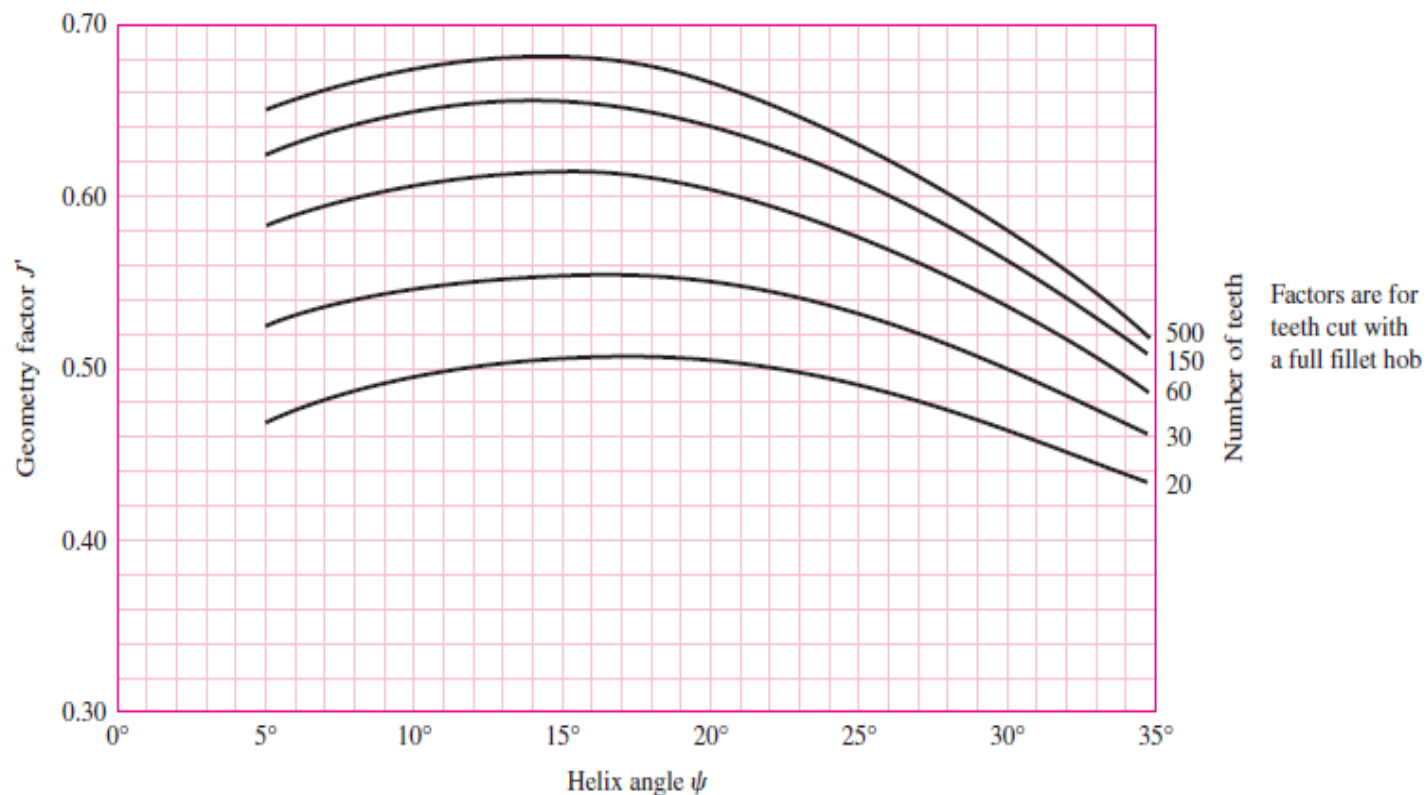
- ▶ Fator geométrico **J** para engrenagens cilíndricas de dentes retos com ângulo de pressão de 20°





Fatores geométricos I e J

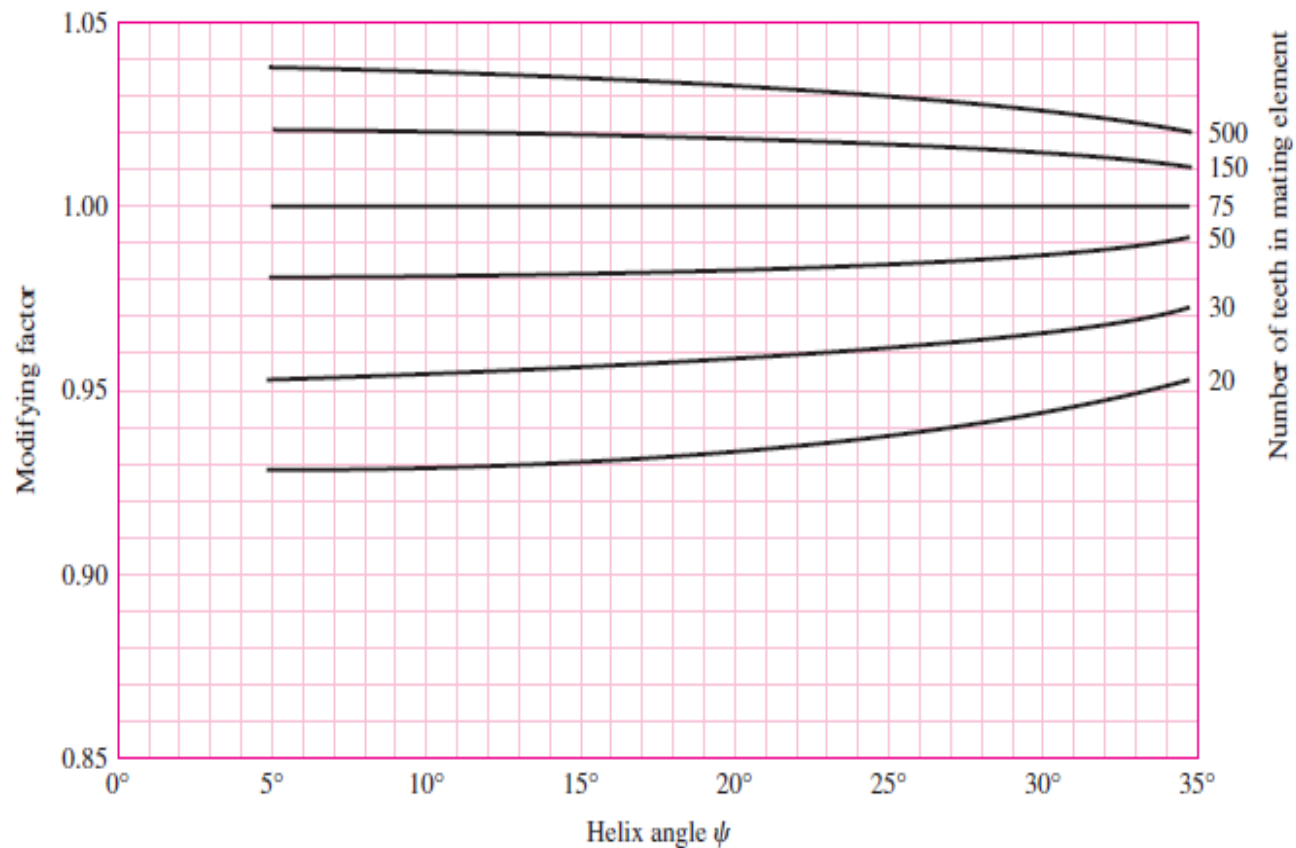
- ▶ Fator geométrico **J** para engrenagens helicoidais ângulo de pressão normal de 20° , e razão de contato $m_F=2$





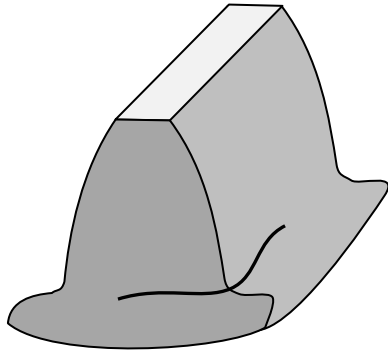
Fatores geométricos I e J

- ▶ Modificador do fator geométrico **J** para engrenagens helicoidais
ângulo de pressão normal de 20° , e razão de contato $m_F=2$





Critério de falha por flexão



$$\sigma < \sigma_{total}$$

Tensão AGMA de flexão

$$\sigma = k_v K_A K_{H\beta} Y_X K_B \frac{W_t}{b m Y_J}$$

Tensão de ciclos de fadiga a flexão

$$\sigma_{total} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{(K_T K_R)}$$

Fator de confiabilidade

Fator dinâmico

Fator de segurança a flexão



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de superfície

Fator resistência para *pitting*

Espessura do dente

Diâmetro *pitch* do pinhão

Fator de distribuição de carga

Fator de resistência a flexão

Fator de sobrecarga

Fator dinâmico

Fator de Coeficiente elástico



Equação AGMA de tensão de contato

- ▶ Fator e coeficiente elástico - Z_E

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b}\right) \left(\frac{Z_r}{Z_I}\right)}$$

→ Fator de Coeficiente elástico

$$Z_E = C_p = \left[\frac{1}{\pi \left(\frac{1 - \nu_P^2}{E_P} + \frac{1 - \nu_G^2}{E_G} \right)} \right]^{1/2}$$



Equação AGMA de tensão de contato

Fator de Coeficiente elástico C_p (ZE)

- Coeficiente elástico C_p (ZE),

Pinion Material	Pinion Modulus of Elasticity E_p , psi (MPa)*	Gear Material and Modulus of Elasticity E_G , lbf/in ² (MPa)*					
		Steel 30×10^6 (2×10^5)	Malleable Iron 25×10^6 (1.7×10^5)	Nodular Iron 24×10^6 (1.7×10^5)	Cast Iron 22×10^6 (1.5×10^5)	Aluminum Bronze 17.5×10^6 (1.2×10^5)	Tin Bronze 16×10^6 (1.1×10^5)
Steel	30×10^6 (2×10^5)	2300 (191)	2180 (181)	2160 (179)	2100 (174)	1950 (162)	1900 (158)
Malleable iron	25×10^6 (1.7×10^5)	2180 (181)	2090 (174)	2070 (172)	2020 (168)	1900 (158)	1850 (154)
Nodular iron	24×10^6 (1.7×10^5)	2160 (179)	2070 (172)	2050 (170)	2000 (166)	1880 (156)	1830 (152)
Cast iron	22×10^6 (1.5×10^5)	2100 (174)	2020 (168)	2000 (166)	1960 (163)	1850 (154)	1800 (149)
Aluminum bronze	17.5×10^6 (1.2×10^5)	1950 (162)	1900 (158)	1880 (156)	1850 (154)	1750 (145)	1700 (141)
Tin bronze	16×10^6 (1.1×10^5)	1900 (158)	1850 (154)	1830 (152)	1800 (149)	1700 (141)	1650 (137)



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_H \beta \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

→ Fator dinâmico

$$K_v = \left(\frac{A + \sqrt{200V}}{A} \right)^B$$

► Sistema métrico



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

→ Fator de sobrecarga

Table of Overload Factors, K_o

Driven Machine			
Power source	Uniform	Moderate shock	Heavy shock
Uniform	1.00	1.25	1.75
Light shock	1.25	1.50	2.00
Medium shock	1.50	1.75	2.25



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de resistência a flexão

$$K_S = Y_X = 1,192 \left(\frac{b\sqrt{Y}}{P} \right)^{0,0535}$$

$K_S = Y_X = 1$ por recomendação da norma AGMA



Equação AGMA de tensão de contato

Fator de forma - K_s - Y_x

- O fator de forma não uniformemente as propriedades do material em função do tamanho do dente. Este depende:
 - Da dimensão do dente
 - Diâmetro da peça
 - Razão entre a dimensão do dente e o diâmetro da peça
 - Largura da face
 - Padrão da área de tensão
 - Razão entre a profundidade total e do dente
 - Dureza e tratamento térmico
- Em geral $K_s = 1$, principalmente por que as pesquisas ainda não são conclusivas

$$Y_x = K_s = \frac{1}{k_b} = 1,192 \left(\frac{F \sqrt{Y}}{P} \right)$$



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de distribuição de carga

$$K_m = K_{H\beta} = C_{mf} = 1 + C_{mc}(C_{pf}C_{pm} + C_{ma}C_e)$$

Fator de correção do alinhamento da malha

Fator de alinhamento da malha

Fator modificador da proporção do pinhão

Fator de proporção do pinhão

Fator de correção da carga

Fator de distribuição de carga na face



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator resistência para *pitting*

$$Z_I = I = \begin{cases} \frac{\cos \phi_t \sin \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G + 1} & \text{external gears} \\ \frac{\cos \phi_t \sin \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G - 1} & \text{internal gears} \end{cases}$$

external gears

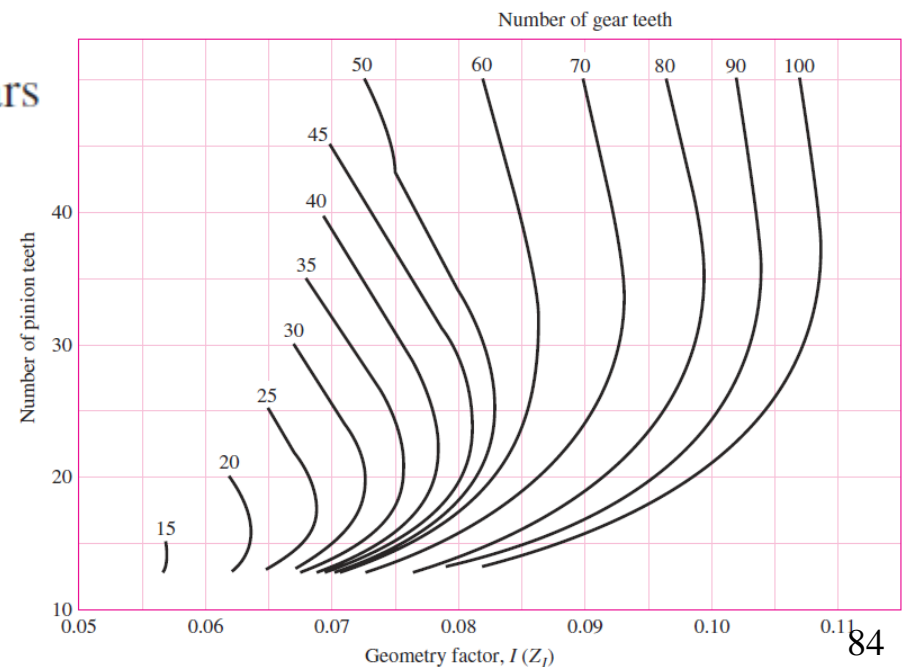
internal gears

$$m_N = 1$$

Diâmetro *pitch* da engrenagem

$$m_G = \frac{N_G}{N_P} = \frac{d_G}{d_P}$$

Diâmetro *pitch* do pinhão





Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b}\right) \left(\frac{Z_r}{Z_I}\right)}$$

Fator de superfície

Fator de condicionamento de superfície Cf (Zr)

- ▶ O Fator de condicionamento de superfície **Cf** (ou **Zr**) é utilizado somente na equação de durabilidade superficial.
- ▶ A validade destas equações depende:
 - ▶ do acabamento superficial, não somente as características topográficas do (ex. *shaving*, retificado, lapidado)
 - ▶ Tensão residual
 - ▶ Deformação plástica (endurecimento) devido ao uso
- ▶ Ainda não existem recomendações de norma para o acabamento superficial de dentes de engrenagens



Equação AGMA de tensão de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de superfície

$Z_r = 1$ por recomendação da norma AGMA



por tensão de contato

$$\sigma < \sigma_{c_{total}}$$

Tensão AGMA de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{K_v K_A Y_X K_{H\beta} \left(\frac{W_t}{d_w b} \right) \left(\frac{Z_r}{Z_I} \right)}$$

Fator de fadiga

Fator de dureza

$$\sigma_{c_{total}} = \frac{S_c}{S_H} \frac{Z_N C_H}{(K_T K_R)}$$

Fator de confiabilidade

Fator dinâmico

Fator de segurança para pitting



Critério de falha

Fator de razão de dureza – C_H

- ▶ Considerando que geralmente o pinhão tem menor número de dentes do que a engrenagem, este estará sujeito a ciclos maiores de tensão de contato.
- ▶ Mesmo com o endurecimento natural resultante do uso, recomenda-se que o pinhão tenha maior dureza, de forma a se obter uma resistência uniforme.
- ▶ O fator de razão de dureza C_H é somente empregado para o projeto da engrenagem



Critério de falha

Fator de razão de dureza – C_H

- ▶ Os valores para o fator de razão de dureza C_H são obtidos através da equação: $C_H = 1 + A'(m_g - 1)$

- ▶ Onde: $A' = 8,98 \times 10^{-3} \left(\frac{H_{BP}}{H_{BG}} \right) - 8,29 \times 10^{-3}$



- ▶ Se $\left(\frac{H_{BP}}{H_{BG}} \right) < 1,2$ então $A' = 0$

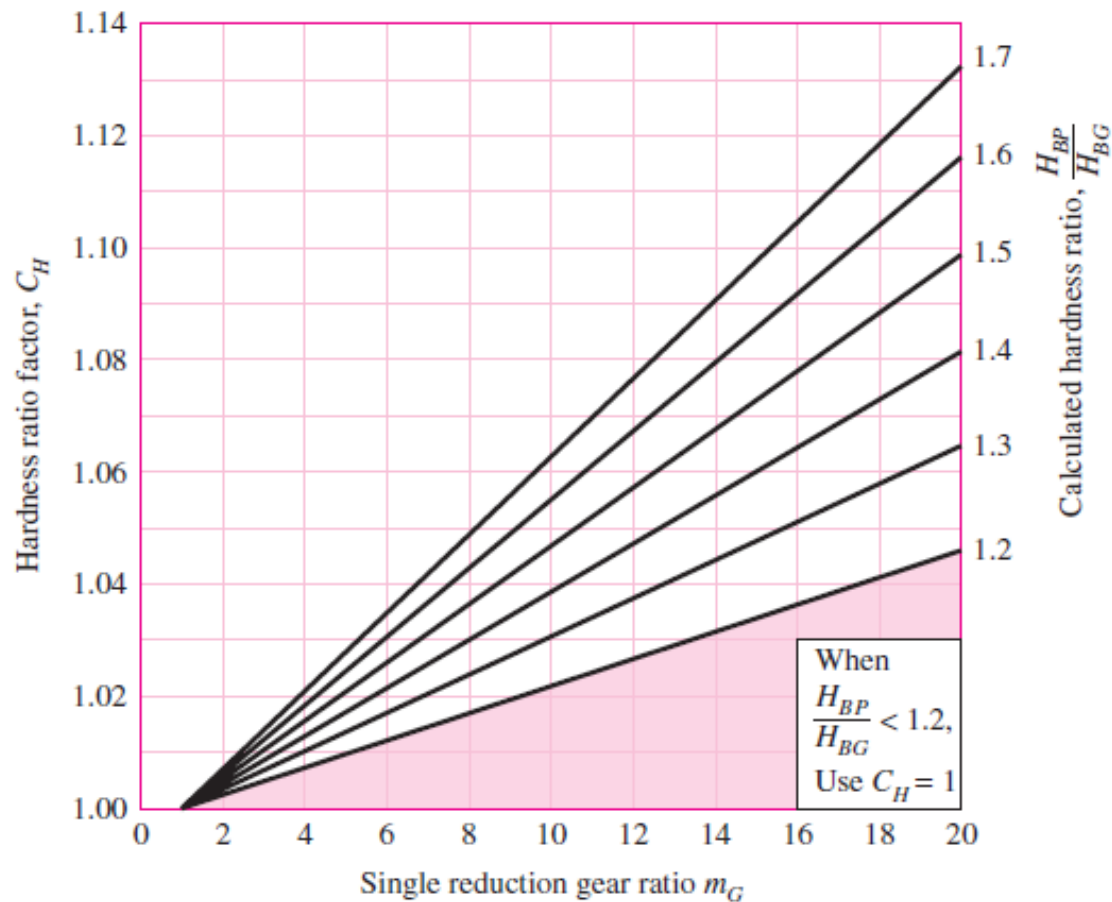
- ▶ Se $\left(\frac{H_{BP}}{H_{BG}} \right) > 1,7$ então $A' = 0,00698$



Critério de falha

Fator de razão de dureza – C_H

- ▶ Para aço endurecido

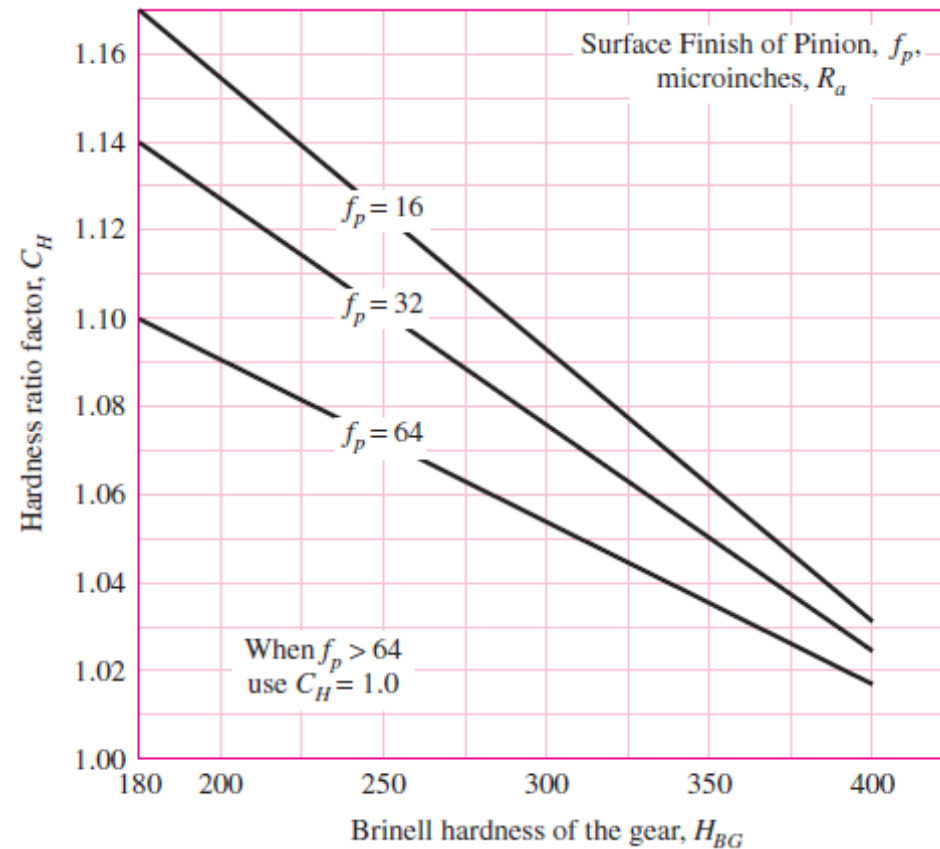




Critério de falha

Fator de razão de dureza – C_H

- ▶ Para aço endurecido - pinhão

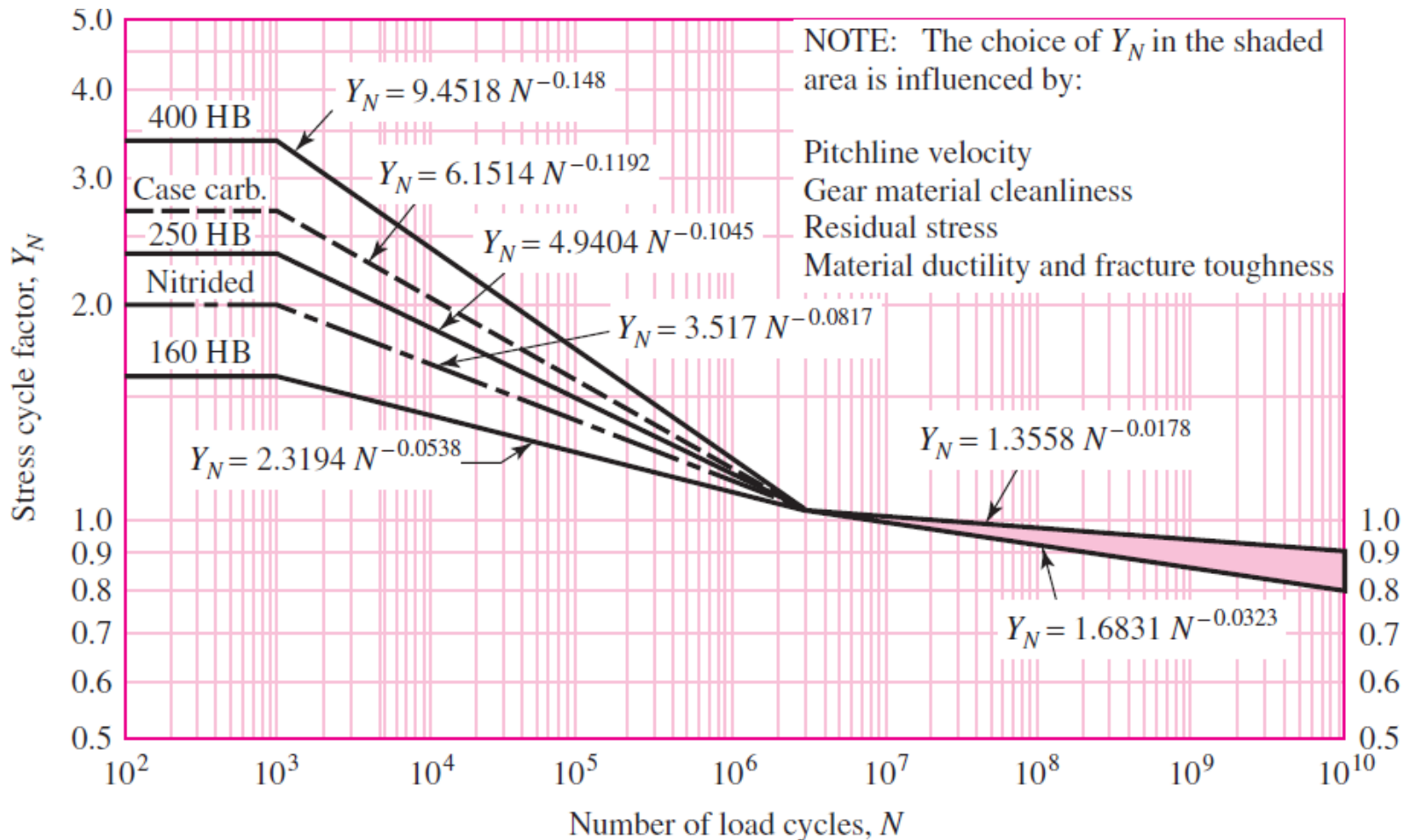




Critério de falha

Fator de Fadiga (tensão cíclica) – Y_N e Z_N

- Fator de tensão cíclica para flexão - Y_N

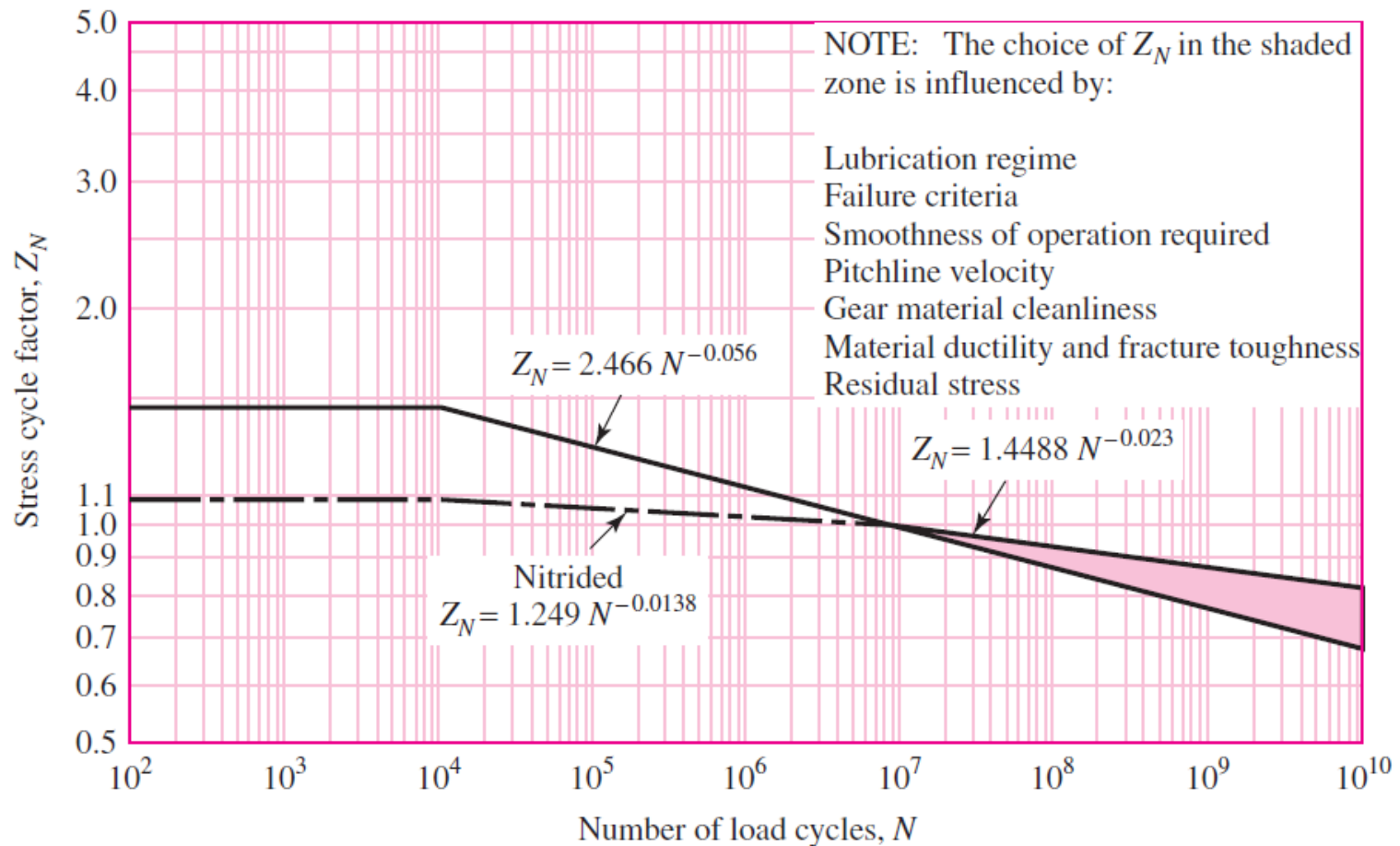




Critério de falha

Fator de fadiga (tensão cíclica) – Y_N e Z_N

- Fator de tensão cíclica para tensão - Z_N





Critério de falha

Fator de confiabilidade – K_R ou Y_Z

- ▶ Fator de confiabilidade contabiliza o efeito da probabilidade estatística de falha do material na fadiga
- ▶ As tensões ***St*** e ***Sc*** estão baseadas em uma confiabilidade de 99%
- ▶ **Fator de confiabilidade – K_R ou Y_Z**

Reliability	$K_R (Y_Z)$
0.9999	1.50
0.999	1.25
0.99	1.00
0.90	0.85
0.50	0.70



Critério de falha

Fator de temperatura – K_T ou Y_θ

- ▶ Para óleo ou temperatura de contato de até 120°C,
 - ▶ $K_T = Y_\theta = 1$.
- ▶ Para temperaturas superiores $K_T = Y_\theta \gg 1$ e deve-se providenciar alguma solução que permita troca de calor.



Critério de falha

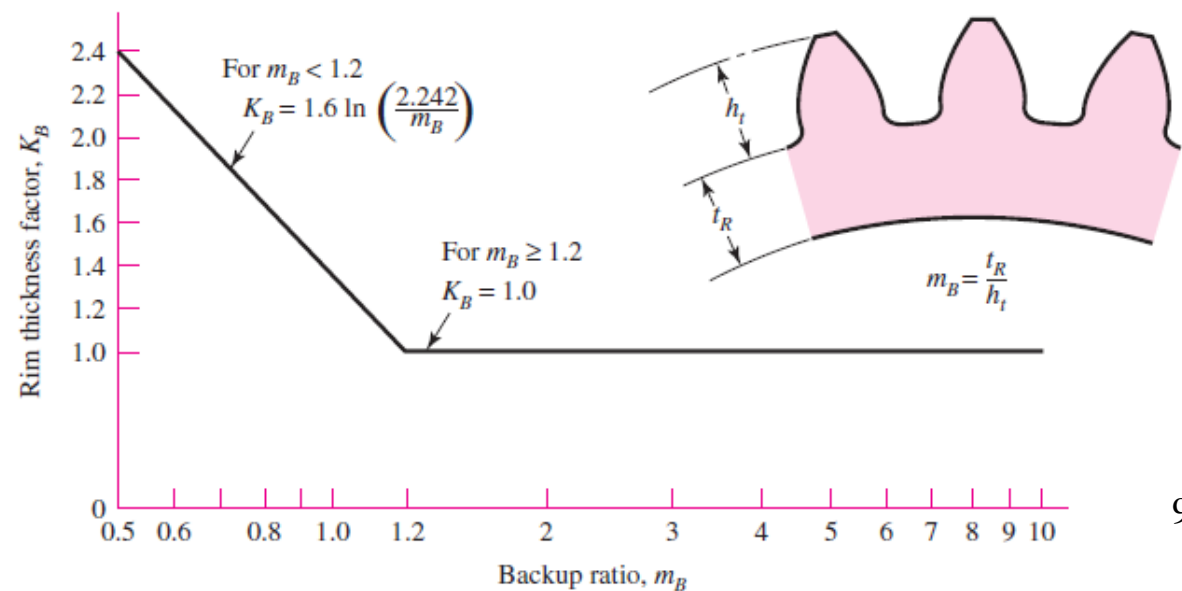
Fator de espessura da curvatura – K_B

- ▶ O Fator de espessura da curvatura – K_B , ajusta as estimativas da tensão de dobramento (flexão) para engrenagens de espessuras curvatura fina.

- ▶ O fator K_B depende do fator m_B :

$$m_B = \frac{t_R}{h_t}$$

$$K_B = \begin{cases} 1.6 \ln \frac{2.242}{m_B} & m_B < 1.2 \\ 1 & m_B \geq 1.2 \end{cases}$$





Equação AGMA

- As equações de Lewis/Barth são a base do sistema AGMA

$$\sigma = K_v \frac{W_t}{F m Y}$$

A metodologia AGMA utiliza duas equações

tensões de deformação

$$\sigma = W_t K_o K_v K_s \frac{1}{b m_t} \frac{K_H K_B}{Y_j}$$

$$\sigma < \sigma_{total}$$

$$\sigma_{total} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{(K_T K_R)}$$

tensões de contato

$$\sigma_c = Z_E \sqrt{W_t K_o K_v K_s \frac{K_H}{d_{w1} b} \frac{Z_R}{Z_l}}$$

$$\sigma < \sigma_{c_{total}}$$

$$\sigma_{c_{total}} = \frac{S_c}{S_H} \frac{Z_N C_H}{(K_T K_R)}$$



FIM DA AULA