Lista 8. Cadeias de Markov. Teorema Ergodico. (sexta 13/11/2020)

Exercício 1. Considere passeio aleatório simples em números inteiros $\{0, 1, \ldots, K\}, K \geq 2$ com transições $p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}$, quando $i \neq 0, K$, e com condições de borda $p_{0,1} = p_{K,K} = p = 1 - p_{0,0} = 1 - p_{K,K-1}$. Achar a probabilidade limite.

Exercício 2.* Considere passeio aleatório simples X_n em números inteiros não negativos $\{0\} \cup \mathbb{N}$ com transições $p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1} > \frac{1}{2}$, quando $i \neq 0$, e com condições de reflexão na borda $p_{0,1} = p = 1 - p_{0,0}$. Sabemos que neste caso todos os estados são transitórios. Seja $p_i = \mathbb{P}(X_n \geq i \mid X_0 = i)$. Observe, que $p_0 = 1$ e $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots < 1$. Achar probabilidade p_1.

Exercício 3. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P para dois casos:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

Achar a medida invariante em ambos casos. Caso existe várias achar pelo menos uma.

Exercício 4. Suponha que em uma linha de montagem final para carros haja o seguinte conjunto de regras:

- Dois conversíveis não podem jamais se seguirem na linha, porque o conteúdo de trabalho desequilibraria a linha.
- Uma perua deve ser seguida de um sedan para equilibrar a linha.
- Um sedan tanto pode ser seguido por uma perua como por um conversível, mas não por um sedan.

Somente esses três modelos são fabricados nessa linha. Monte uma matriz de transição possível para essas regras, inserindo as letras $a, b, c, d, \ldots$ etc., para os valores que não são numericamente definidos pelas regras acima.

1. Se tivesse um programa de produção dado por vetor de proporção de cada tipo de carro a ser feito em um mês, como poderia se determinar uma sequência de probabilidades que correspondesse ao programa e às regras das sequências fornecidas neste problema?
2. Suponha que se firmou um contrato para se entregar 10000 carros ao final de um mês. Desses 10000, aproximadamente 50% tinham que ser sedan, 10% tinham que ser perua e 40% conversível. Determine alguma regra de programação de probabilidade que assegure essa produção e que ainda corresponda às regras deste problema.

Exercício 5. Para um processo de ramificação, encontre a probabilidade de extinção π_0 quando

1. $p_0 = 1/4, p_2 = 3/4$;
2. $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_3 = 1/3$.

Supomos que $X_0 = 1$. Achar a média e a variância de X_n para ambos os processos?

Exercício 5. ([2], p.234) *Modelo de difusão de Ehrenfest.* Suponha que se tenha um recipiente com uma membrana que o separa em compartimentos A e B. Inicialmente, há j moléculas no compartimento A e $a - j$ no compartimento B. Diz-se que ocorre uma *transição* sempre que uma molécula atravessa a membrana (tanto de A para B como de B para A). Seja X_n o número de moléculas no comportamento A após n transições. Em cada transição, X_n aumenta ou diminui em exatamente uma molécula. Suponha que a probabilidade de que uma molécula mude de compartimento seja proporcional ao número de moléculas no compartimento de onde saiu tal molécula. Monte um modelo de uma cadeia de Markov desse processo de difusão. O que pode dizer sobre a medida invariante do processo? Falam que a medida invariante existe e ela é distribuição binomial. Confere?

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.

[2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos.* Capítulo 8.