Aula 8. Cadeias de Markov: medida invariante. Exercícios.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Exemplo 4.19. Modelo de mobilidade.

Supomos que as famílias de uma sociedade estratificadas pela renda em três classes: classe alta, média e baixa. A transição de geração para geração pode ser resumida em seguinte matriz de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.05 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}$$

o que significa, por exemplo, que descendente de família da classe média vai formar a família de classe alta, média ou classe baixa com a probabilidade 0.05, 0.70 e 0.25. Achar a distribuição em porcentagem dessa população pelas renda em classes.

Exemplo 4.19. Modelo de mobilidade. Solução.

A medida de probabilidade limite $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ satisfaz equação

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.45\pi_0 + 0.05\pi_1 + 0.01\pi_2 \\
\pi_1 &= 0.48\pi_0 + 0.70\pi_1 + 0.25\pi_2 \\
\pi_2 &= 0.07\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.49\pi_2 \\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 = 1
\end{aligned}$$

a solução

$$\pi_0 = 0.07,\ \pi_1 = 0.62,\ \pi_2 = 0.31.$$

Em outras palavras, a sociedade cuja mobilidade representada pela matriz $\mathbf{P}$ estratificada de seguinte modo: 7% da população são famílias de classe alta, 62% de classe média e 31% da classe baixa.

Teorema principal (ergódica).

Lembramos o teorema principal.

Teorema: *Para qualquer cadeia de Markov ergódica (todos os estados dela são ergódicos) o limite* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ *existe e não depende do* i.

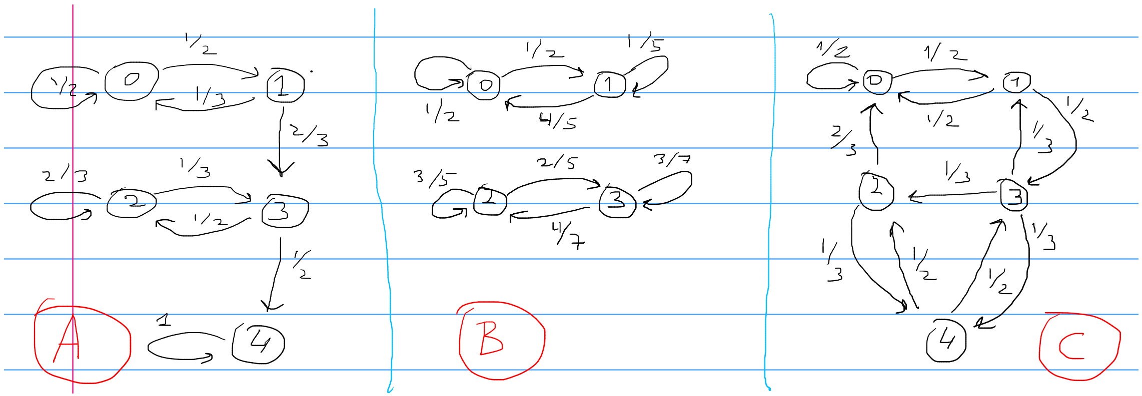
Seja

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad j \geq 0.$$

Então o vetor $\pi^T = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ *é solução única do seguinte sistema*

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases}$$

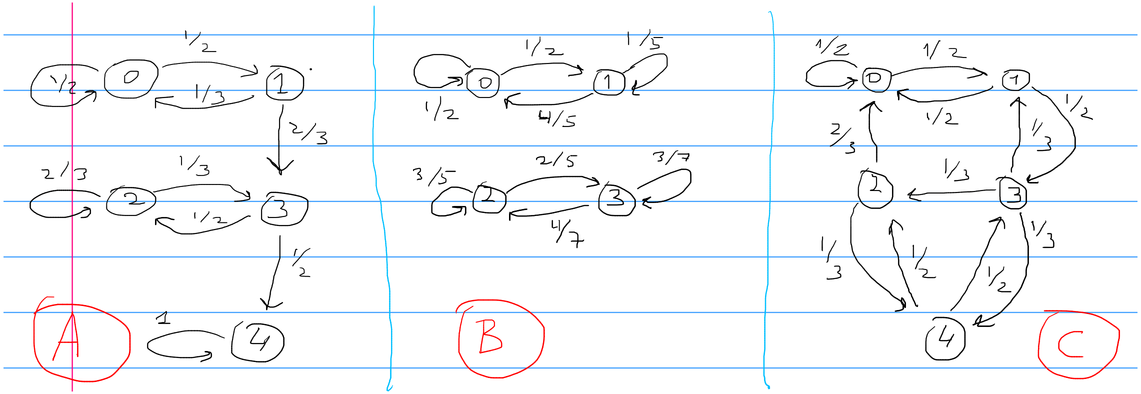
Teorema principal (ergódica). Probabilidade limite



(A) $\alpha^T = (1, 0, 0, 0, 0)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} \cong \begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.03 \\ 0.20 \\ 0.10 \\ 0.63 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{30} \cong \begin{pmatrix} 7.8e-05 \\ 5.4e-05 \\ 1.4e-02 \\ 5.4e-03 \\ 0.98 \end{pmatrix}.$$

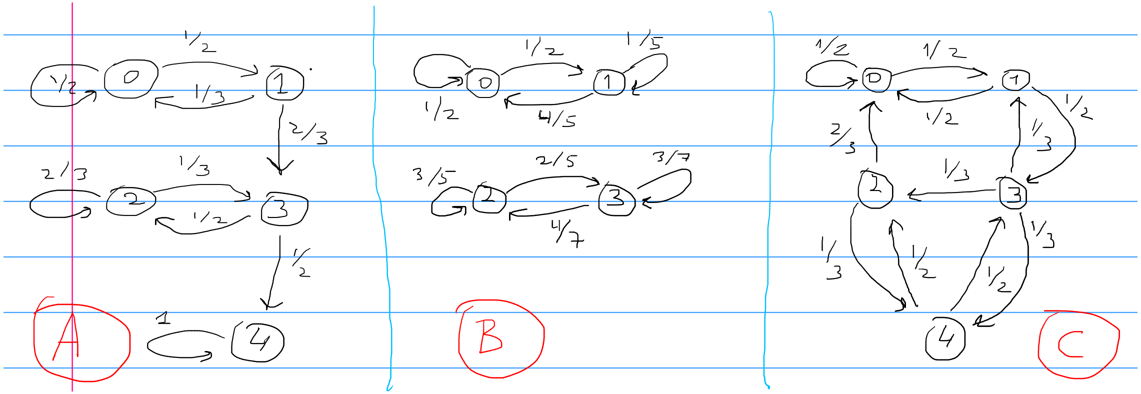
Teorema principal (ergódica). Probabilidade limite



(B) $\alpha^T = (1, 0, 0, 0)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0.6185 \\ 0.3815 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.6154099 \\ 0.3845902 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

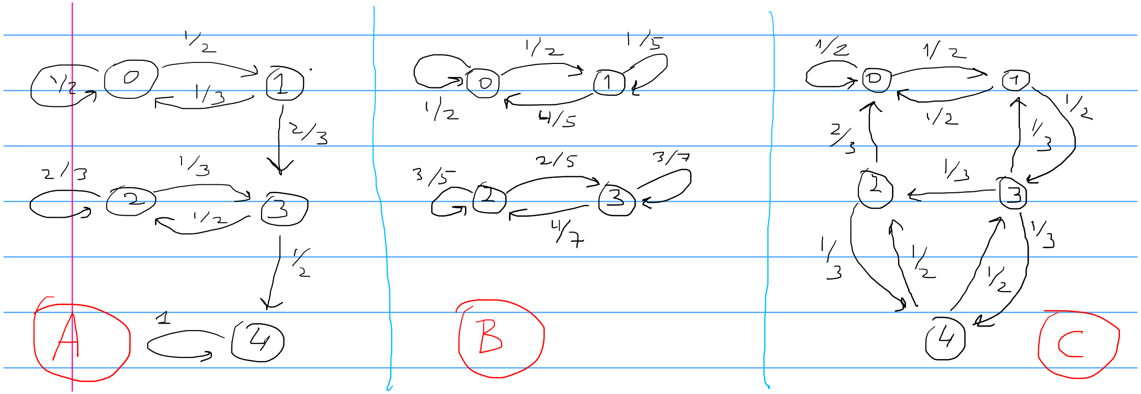
Teorema principal (ergódica). Probabilidade limite



(B) $\alpha^T = (0, 0, 1, 0)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5882356 \\ 0.4117644 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5882353 \\ 0.4117647 \end{pmatrix}.$$

Teorema principal (ergódica). Probabilidade limite



(C) $\alpha^T = (1,0,0,0,0)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} \cong \begin{pmatrix} 0.3842 \\ 0.2537 \\ 0.1031 \\ 0.1663 \\ 0.0926 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{50} \cong \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.2500 \\ 0.1022 \\ 0.1704 \\ 0.0909 \end{pmatrix},$$

Teorema principal (ergódica). Probabilidade limite

(C) $\alpha^T = (1, 0, 0, 0, 0)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} \cong \begin{pmatrix} 0.3842 \\ 0.2537 \\ 0.1031 \\ 0.1663 \\ 0.0926 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{50} \cong \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.2500 \\ 0.1022 \\ 0.1704 \\ 0.0909 \end{pmatrix},$$

(C) $\alpha^T = (0, 0, 0, 0, 1)$

$$\alpha^T \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{10} \cong \begin{pmatrix} 0.3887 \\ 0.2555 \\ 0.1014 \\ 0.1757 \\ 0.0884 \end{pmatrix}, \alpha^T \mathbf{P}^{50} \cong \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.2500 \\ 0.1022 \\ 0.1704 \\ 0.0909 \end{pmatrix},$$

Problema da ruína do jogador.

João e Maria jogam xadrez. Maria joga melhor de que João em média 2 contra 1 (chances de Maria ganhar um jogo são 2:1). Para igualar as chances de ganhar banca, eles decidem que a Maria fica com 5 pontos quando o João com 10. As chances de ganhar a banca com esta divisão ficaram iguais para jogadores?

Solução: $N = 15, p = 2/3, i = 5$: $q/p = 1/2$

$$P_5 = \frac{1 - 0.5^5}{1 - 0.5^{15}} \cong 0.97$$

Problema da ruína do jogador.

João e Maria jogam xadrez. Maria ganha o jogo com probabilidade p. Para igualar as chances de ganhar banca, eles decidem que a Maria fica com 5 pontos quando o João com 10. Qual deveria ser a probabilidade p, para que as chances de ganhar a banca com esta divisão ficariam iguais para jogadores?

Solução: $N = 15, i = 5$: anotamos $x = q/p$

$$P_5 = \frac{1 - x^5}{1 - x^{15}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 - 2a + 1 = 0, x = \sqrt[5]{a} \Rightarrow (a-1)(a^2 + a - 1)$$

então o único raiz em intervalo $(0, 1)$ é

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0.62 \Rightarrow x \cong 0.91$$
$$p = \frac{1}{x + 1} \cong 0.52.$$

$\square$

Problema da ruína do jogador.

Considere passeio aleatório X_n com probabilidades de transição $p_{i,i+1} = p = 1 = p_{i,i-1}$ e $p_{00} = p_{01} = \frac{1}{2}$ em números inteiros não negativos $E = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Supondo que $p > \frac{1}{2}$ (todos os estados são transitórios) achar a probabilidade de que passeio vai atingir o estado 0 pelo menos uma vez, começando de estado $i \neq 0$, $X_0 = i > 0$.

Solução: (*a cadeia é aperiódica?*) Representando o passeio como problema de ruína de jogador, a probabilidade desejada é a probabilidade de $1 - P_i$ em jogo com a Natureza ($N = \infty$), assim, direto:

$$1 - P_i = 1 - \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

$\square$

Processo de ramificação. Probabilidade de extinção.

Para um processo de ramificação, encontre a probabilidade de extinção π_0 *quando*

1. $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4$;

2. $p_0 = 1/4, p_2 = 3/4$;

3. $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_3 = 1/3$.

Solução: π_0 deve satisfazer seguinte equação $\pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi^k p_k$:

$$\pi_0 = \frac{1}{2} + \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_0^2 \cdot \frac{1}{4} \;\Rightarrow \pi_0 = 1$$

$\square$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.