PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Modelo de Markowitz

PTC - EPUSP

Aula 22 - 2020

Média-Variância

Suponha que haja n ativos com valor inicial

$$S_1(0), \ldots, S_n(0),$$

e que se disponha de um valor $V(0)$ para investir nesses ativos. Seja

$$H_1, \ldots, H_n$$

uma estratégia de investimento para cada ativo financeiro (valores negativos representam posições a descoberto), isto é,

- H_i representa a quantidade do ativo i que se tem na carteira.

Posições a descoberto

Serão consideradas na análise adiante posições a descoberto (ou vendidas), que representariam a seguinte situação.

1. No instante inicial, toma-se emprestado de um agente financeiro um ativo cujo valor é $S_i(0)$.
2. Vende-se esse ativo para possível investimento em outros ativos.
3. No instante seguinte, compra-se esse mesmo ativo pelo valor de mercado $S_i(1)$, devolvendo-o ao agente financeiro que fez o empréstimo inicial.

Logo, o investidor lucra com a queda do preço e perde com a alta.

Média-Variância de Carteiras

Deve-se ter

$$V(0) = H_1 S_1(0) + \ldots + H_n S_n(0).$$

Pode-se definir

$$\omega_i = \frac{H_i S_i(0)}{V(0)}$$

que representa a proporção do total investido no ativo i. Valores negativos representam uma posição a descoberto naquele ativo. Logicamente, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Exemplo

$$V(0) = 100, \quad S_1(0) = 10, \quad S_2(0) = 20.$$

Carteira:

$$H_1 = 4, \quad H_2 = 3$$

Temos que

$$V(0) = 100 = 4 \times 10 + 3 \times 20 = H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)$$

$$\omega_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{V(0)} = \frac{40}{100} = 0,4, \;\; \omega_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{V(0)} = \frac{60}{100} = 0,6.$$

$$\sum_{i=1}^{2} \omega_i = \omega_1 + \omega_2 = 1.$$

Exemplo - Posição a Descoberto

$$V(0) = 100, \quad S_1(0) = 10, \quad S_2(0) = 20.$$

Carteira:

$$H_1 = -2, \quad H_2 = 6$$

Temos que

$$\begin{aligned} V(0) - H_1 S_1(0) &= 100 - (-2 \times 10) = 100 + 20 = 120 \\ &= H_2 S_2(0) = 6 \times 20, \\ V(0) = 100 &= H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0) = -20 + 120. \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{V(0)} = -\frac{20}{100} = -0,2, \;\; \omega_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{V(0)} = \frac{120}{100} = 1,2.$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1,2 - 0,2 = 1,0.$$

Média-Variância de Carteiras

Seja P a taxa de retorno da carteira ao final de um período, e R_i, o retorno do ativo i. Como o valor da carteira no período seguinte, denotado por $V(1)$, vale

$$V(1) = H_1 S_1(1) + \ldots + H_n S_n(1),$$

e lembrando que

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)}$$

tem-se que

Média-Variância de Carteiras

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{V(1)-V(0)}{V(0)} \\
&= \frac{H_1S_1(1)+\ldots+H_nS_n(1)-(H_1S_1(0)+\ldots+H_nS_n(0))}{V(0)} \\
&= \frac{H_1(S_1(1)-S(0))+\ldots+H_n(S_n(1)-S_n(0))}{V(0)} \\
&= \frac{H_1R_1S_1(0)+\ldots+H_nR_nS_n(0)}{V(0)} \\
&= \frac{H_1S_1(0)}{V(0)}R_1+\ldots+\frac{H_nS_n(0)}{V(0)}R_n \\
&= \omega_1R_1+\ldots+\omega_nR_n = \omega' R,
\end{aligned}
$$

em que

Média-Variância de Carteiras

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo

$$V(0) = 100, \quad S_1(0) = 10, \quad S_2(0) = 20, \quad S_1(1) = 8, \quad S_2(0) = 21,$$

$$R_1 = \frac{8 - 10}{10} = -0,2, \quad R_2 = \frac{21 - 20}{20} = 0,05,$$

Carteira:

$$H_1 = 4, \quad H_2 = 3, \quad \omega_1 = 0,4, \quad \omega_2 = 0,6$$

$$V(1) = 95 = 4 \times 8 + 3 \times 21 = H_1 S_1(1) + H_2 S_2(1)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \frac{95 - 100}{100} = -0,05 \\ &= \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = 0,4 \times (-0,2) + 0,6 \times 0,05 = \omega' R \end{aligned}$$

Exemplo - Posição a Descoberto

$$V(0) = 100, \quad S_1(0) = 10, \quad S_2(0) = 20, \quad S_1(1) = 8, \quad S_2(0) = 21,$$
$$R_1 = \frac{8-10}{10} = -0,2, \quad R_2 = \frac{21-20}{20} = 0,05,$$

Carteira:

$$H_1 = -2, \quad H_2 = 6, \quad \omega_1 = -0,2, \quad \omega_2 = 1,2$$

$$V(1) = 110 = -2 \times 8 + 6 \times 21 = H_1 S_1(1) + H_2 S_2(1)$$

$$P = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \frac{110-100}{100} = 0,1$$
$$= \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 = -0,2 \times (-0,2) + 1,2 \times 0,05 = \omega' R$$

Média-Variância de Carteiras

Define-se

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = cov(R) = E((R - r)(R - r)')$$

e

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Média-Variância de Carteiras

A média do retorno P da carteira, denotada por μ, é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r = \omega_1 r_1 + \ldots + \omega_n r_n$$

e a variância de P, denotada por σ^2, é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega,$$

lembrando-se também que

$$\omega' e = \omega_1 + \ldots + \omega_n = 1.$$

Média-Variância de Carteiras

Resumindo, tem-se que

$$\begin{cases} P = \omega' R \\ \mu = \omega' r \\ \sigma^2 = \omega' \Sigma \omega \\ 1 = \omega' e \end{cases} .$$

Modelos de Rastreamento - Otimização por Mínimos Quadrados

O método consiste em encontrar a composição da carteira que minimize a diferença ao quadrado entre seus retornos e os retornos do benchmark. O problema consiste em minimizar o seguinte erro err:

$$err = y - \Gamma\omega.$$

O vetor ω, que dá a composição da carteira, é escolhido segundo a seguinte minimização:

$$
\begin{aligned}
&\text{min}\,(y-\Gamma\omega)'(y-\Gamma\omega)\\
&\text{sujeito a}\\
&\omega' e = 1,\\
&\omega \in R^p.
\end{aligned}
$$

A restrição $\omega' e = 1$ significa que o somatório de todos os pesos dos ativos é igual a 1.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, a solução desse problema é:

$$\omega = \left(\frac{1 - e'(\Gamma'\Gamma)^{-1}\Gamma' y}{e'(\Gamma'\Gamma)^{-1} e}\right)(\Gamma'\Gamma)^{-1} e + (\Gamma'\Gamma)^{-1}\Gamma' y$$

Modelo de Markowitz

1. A abordagem clássica de média–variância foi inicialmente proposta por H. Markowitz nos anos de 1950 e lhe valeu o prêmio Nobel de Economia em 1990.
2. Permite compor uma carteira de forma a obter uma solução de compromisso ótima entre retorno e risco.
3. Variáveis de decisão para a seleção dos ativos: valor esperado e a variância das taxas de retorno.
4. Harry Markowitz desenvolveu a que é hoje conhecida como "Teoria Moderna de Carteiras",
5. estabelecendo, entre outros resultados, a fronteira eficiente para as carteiras de investimento.

Carteiras com apenas ativos de risco

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização. Para um dado valor de μ (rentabilidade desejada),

$$\begin{aligned}
&\min \omega'\Sigma\omega \\
&\text{sujeito a} \\
&\omega' r = \mu \\
&\omega' e = 1 \\
&\omega \in R^n.
\end{aligned}$$

Carteiras com apenas ativos de risco

Definem-se as seguintes variáveis:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= e'\Sigma^{-1}e \\
\gamma &= r'\Sigma^{-1}r \\
\psi &= e'\Sigma^{-1}r \\
\delta &= \alpha\gamma - \psi^2 = (e'\Sigma^{-1}e)(r'\Sigma^{-1}r) - (e'\Sigma^{-1}r)^2.
\end{aligned}
$$

Carteiras com apenas ativos de risco

Obtém-se a seguinte solução para o problema de média–variância .

Solução do Problema de Média-Variância

A solução do problema de média–variância é dada por

$$\omega = h\,\mu + g,$$

em que h e g, não-dependentes de μ, são dados por,

$$h = \frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e$$

$$g = \frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}r.$$

Exemplo

Considere 3 ativos descorrelacionados com retorno esperado $r_1 = 10\%$, $r_2 = 15\%$, $r_3 = 20\%$. Logo a matriz de covariância Σ e vetor de retornos r são dados por:

$$\Sigma = cov(R) = 0,01I = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$$

$$r = E(R) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,15 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

.

Exemplo

1) Determine a a composição das carteiras de mínima variância em função de μ.
2) Calcule as carteiras de mínima variância para $\mu = 0,1$, $\mu = 0,15$, $\mu = 0,2$, e determine os riscos associados a essas carteiras. Compare esses valores com os riscos dos ativos R_1, R_2, R_3.
3) Qual é a carteira de mínima variância global?
4) Qual deveria ser a sua carteira caso deseje correr um risco de $\sigma = 7\%$?
5) Esboce no plano risco (σ) X retorno (μ) a curva associada às carteiras de mínima variância.