1 Modos de convergência

Seja X um espaço métrico e $f_n : X \to \mathbb{R}$, temos noções de convergência para f:

1. Dada f_n e $x_0 \in X$, dizemos que $f_n(x_0)$ **converge** para $f(x_0)$ se $|f_n(x_0) - f(x_0)| \to 0$ quando $n \to \infty$.

2. Dizemos que a sequência é **uniformemente convergente** num conjunto $A \subset X$ se $\sup_{x \in A}\{|f_n(x) - f(x)|\} \to 0$ quando $n \to \infty$.

A noção de medida acrescenta outros tipos de convergência:

1. **Convergência em quase todo ponto**: ó que ocorre quando o conjunto $B = \{x \in X \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$ tem medida zero.

2. **Convergência no espaço L^p**: Se $f_n,, f \in L^p$ e $\|f_n - f\|_p \to 0$ (com $p \geq 1$).

3. **Convergência no espaço L_∞** quando $||f_n - f||_\infty = sup\ ess|f_n(x) - f(x)| \to 0$.

Exemplo. Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$. É claro que $f_n \to 0$ q.t.p. Mas não converge uniformemente e não converge em L^p. Com efeito, $\|f_n - 0\|_p^p = \int n^p \chi_{(0,1/n)} d\mu = n^p \frac{1}{n} = n^{p-1} \not\to 0$ Daí, $\|f_n - 0\|_p = n^{p-1/p}$ que vale 1 se $p = 1$ e diverge se $p > 1$.

Veremos depois que convergência em L^p em geral não implica convergência q.t.p, exceto claro no caso de L_∞.

Temos mais dois tipos de convergência, importantes por si e em especial na área de probabilidades (quando $\mu(X) = 1$).

Definição 1.1 (**Convergência em medida**). Dizemos que $f_n \to f$ em medida e escrevemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$ se para todo $\varepsilon > 0$ temos $\mu(\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$.

Para ilustrar, a sequência do exemplo acima converge em medida para $f = 0$, pois $\mu(\{|f_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{n} \to 0$. Um outro exemplo importante onde é usada a convergência em medida, é a Lei Fraca dos Grandes Números ou Teorema de Bernoulli.

Observe que pela definição o conjunto pode depender de cada f_n, ou seja, mudar com n.

Definição 1.2 (**Convergência quase uniforme**). Dizemos que $f_n \to f$ quase uniformemente em X (q.u.) se dado $\varepsilon > 0$ existe $A(\varepsilon) \subset X$ com:

1. $A(\varepsilon) = \{f_n \to f$ uniformemente $\}$

2. $\mu(A(\varepsilon)^c) < \varepsilon$

Observação: o nome "quase uniforme"pode levar à confusão, porque temos usado a palavra "quase"para designar algum fato que ocorre exceto num conjunto de medida 0. Na verdade a convergência uniforme exceto num conjunto de medida zero é a convergência em L_∞.

Seguindo o mesmo exemplo, $f_n \to 0$ q.u. porque dado $\varepsilon > 0$ tomamos $1/n < \varepsilon$ e $A(1/n) = [1/n, 1] \cup \{0\}$, neste conjunto temos $f_k = f = 0$ para todo

$k \geq n+1$.

Vamos estudar estas convergências. Quando uma implica a outra? Quando isso é falso? Quando a implicação é falsa, mas existe uma subseqûencia que converge no sentido desejado?

Se acrescentarmos hipóteses, como $\mu(X) < \infty$ ou que existe g integrável que domina a sequência $|f_n|$, o que muda?

No exemplo discutido vimos que se $f_n \to f$ q.t.p ou em medida isto não implica que $\|f_n - f\|_p \to 0$, mesmo no caso $\mu(X) < \infty$.

Ou seja, temos um esquema:

$$\begin{tikzcd}
L^p & q.u \arrow[l, "|" marking] \\
q.t.p \arrow[u, "|" marking] & EM \arrow[ul, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

Também temos as noções de sequências de Cauchy (também chamadas de **sequências fundamentais**) para cada um destes tipos de convergência.

Deixamos como exercício enunciar as definições.

Por outro lado, é claro que:

1. Se f_n for sequência de Cauchy q.t.p então ela converge q.t.p.
2. Se f_n for de Cauchy em L^p o Teorema de Riesz-Fischer mostra que ela é convergente em L^p.
3. Se f_n for de Cauchy em L_∞ também converge, como vimos depois do Teorema de Riesz-Fischer.

É fácil mostrar que:

Proposição 1. *Se* $\|f_n - f\|_p \to 0$ *então* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Demonstração. Seja $A_n = \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$, por Chebychev

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p d\mu \geq \varepsilon^p \mu(A_n)$$

Como $\|f_n - f\|_p^p \to 0$ então $\mu(A_n) \to 0$ e $f_n \xrightarrow{\mu} f$. $\square$

Proposição 2. *Se* $f_n \to f$ *q.u então* $f_n \to f$ *q.t.p.*

Demonstração. Seja $A_k = \{x \in X \mid f_n \to f \text{ uniformemente }\}$ com $\mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$. Então $f_n \to f$ em A_k. Pela mesma razão, $f_n \to f$ em $A = \cup A_k$. Agora, $\mu(A^c) = \mu((\cup A_k)^c) = \mu(\cap A_k^c)$. Como $\mu(\cap A_k^c) < \mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$ para todo k, segue que $\mu(A^c) = 0$. Logo $f_n \to f$ q.t.p. $\square$

Exemplo: $f_n = x^n$, $x \in (-1,1)$ ilustra a demonstração acima. Converge q.u, não converge uniformemente e converge qtp. Temos então o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L^p \arrow[dr] & q.u \arrow[l, "|" marking] \arrow[dl] \\
q.t.p \arrow[u, "|" marking] & EM \arrow[ul, "/" marking]
\end{tikzcd}$$

Proposição 3. $f_n \to f \ q.u \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$

Demonstração. Pela convergência quase uniforme existe $A_k = \{x \in X \mid f_n \to f$ uniformemente $\}$ com $\mu(A_k^c) < \frac{1}{k}$, como acima. Logo para n grande, dado $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ está contido em A_k^c e assim, $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(A_k^c) < \frac{1}{k} \to 0$. Logo $f_n \xrightarrow{\mu} f$. $\square$

Ficamos assim com o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L^p \arrow[dr, shift left] & q.u \arrow[l, "\shortmid" marking] \arrow[d] \arrow[dl] \\
q.t.p \arrow[u, "\shortmid" marking] & EM \arrow[ul, shift left, "\shortmid" marking]
\end{tikzcd}$$

Exercício: seja a sequência $g_n = (1/n)\chi_{[n,2n]}$. Como é a convergência: uniforme, em todo ponto, qtp, q.u., em média p, em L_∞, em medida?
O mesmo para as funções $h_n = \chi_{[n,2n]}$; $\varphi_n = \chi_{[n,n+1]}$; $\psi_n = x^n, \ x \in [-1,1]$, $\lambda_n = x^n; \ x \in (-1,1)$.
E a função $\nu_n = (n+1)\, x^n; \ x \in [0,1)$?

Uma pergunta natural é: será que $f_n \to f$ q.t.p implica $f_n \xrightarrow{\mu} f$? Em geral isto é falso. Tomemos $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ e $X = \mathbb{R}$. Então $f_n \to 0$ q.t.p mas $\mu(\{f_n \geq \varepsilon > 0\}) = 1$ para todo n, se $\varepsilon \ < 1$. Notemos que isto ocorre num conjunto X com $\mu(X) = \infty$.

Antes de ver o que acontece no caso de $\mu(X) < \infty$, vejamos outra propriedade importante da convergência em medida:

Proposição 4. *Seja $\{f_n\}$ de Cauchy em medida. Então:*

1. *Existe $f \in M$ tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*
2. *Existe subsequência $\{f_{n_j}\}$ com $f_{n_j} \to f$ q.t.p.*
3. *Se $f_n \xrightarrow{\mu} g$ então $f = g$ q.t.p.*

Demonstração. Faremos algo semelhante à demonstração do Teorema de Riesz Fischer.
Escolhemos uma subsequência $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $E_j = \{x \mid |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq \frac{1}{2^j}\}$ tem medida $\mu(E_j) \leq \frac{1}{2^j}$.

Seja $F_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_j$, então

$$\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

Também, se $x \notin F_k$ para $k \leq j \leq i$ então

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{p=j}^{i-1} |g_{p+1}(x) - g_p(x)| \leq \sum_{p=j}^{i-1} \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

Assim $\{g_j\}$ é de Cauchy em cada ponto de F_k^c.

Tomamos $F = \cap_k F_k$. Logo $\mu(F) \leq \mu(F_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim $\mu(F) = 0$.

Definamos $f(x) = \lim g_j(x)$ para $x \notin F$ e $f(x) = 0$ em F. Assim f é mensurável e $g_j \to f$ q.t.p, provando o segundo item.

Também, se $j \geq k$ e $x \notin F_k$ então

$$|g_j(x) - f(x)| < \frac{1}{2^{j-1}}$$

Portanto

$$\mu\left(\{|g_j(x) - f(x)| > \frac{1}{2^{j-1}}\}\right) \leq \mu(F_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Assim, quando $k \to \infty$, como $j \geq k$, $j \to \infty$ e $\mu(F_k) \to 0$. E $g_j \xrightarrow{\mu} f$. Temos também que para quaisquer n, j:

$$\{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{|f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

A medida dos dois conjuntos da direita tende para zero quando $n, j \to \infty$ porque o primeiro vem da hipótese de $\{f_n\}$ ser de Cauchy em medida e o segundo acabamos de ver. Logo $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e provamos o primeiro item.

Agora o terceiro: Se $f_n \xrightarrow{\mu} g$ então, com uma desigualdade semelhante à anterior:

$$\{|f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subset \{|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Como a medida de cada um dos conjuntos da direita tende para zero segue que para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{|f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ segue que

$$\{|f(x) - g(x)| > 0\} = \bigcup \{|f(x) - g(x)| > \frac{1}{n}\}$$

e o segundo membro tem medida zero. Assim, $f = g$ q.t.p. $\square$

Corolário. *Se $f_n \to f$ em L^1 então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ com $f_{n_j} \to f$ q.t.p.*

Demonstração. Como $f_n \to f$ em L^1 então $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e, portanto, existe subsequência convergindo para f q.t.p. $\square$

Mostramos que se $f_n \to f$ q.t.p $\not\Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$. O contra-exemplo era num espaço de medida infinita. No caso de termos $\mu(X) < \infty$ temos um resultado ainda mais forte.

Teorema 5 (Teorema de Egoroff)**.** *Seja $f_n \to f$ q.t.p mensuráveis, com $\mu(X) < \infty$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $E \subset X$ tal que $\mu(E) < \varepsilon$ e $f_n \to f$ uniformemente em E^c (ou seja, converge quase unifomemente).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f_n \to f$ em todo ponto em X.
Vamos achar o complementar do conjunto onde f_n converge uniformemente.
Definimos os conjuntos

$$E_n(k) = \cup_{m=n}^{\infty} \{|f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$$

. Este é o conjunto dos pontos onde $\{|f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$ para algum $m \geq n$. Logo, para k fixo $E_{n+1}(k) \subset E_n(k)$, ou seja que a sequência é decrescente. Também $\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$ porque $f_n \to f$ pontualmente. Como $\mu(X) < \infty$ segue que $\mu(E_n(k)) \to \mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n(k)) = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, escolhemos n_k grande de forma que $\mu(E_{n_k}(k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Seja $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. Logo $\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon$ e se $x \notin E$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ para todo $n \geq n_k$. Portanto $f_n \to f$ uniformemente em E^c. $\square$

Esse Teorema é muito usado em probabilidade.

Logo se $\mu(X) < \infty$ temos que convergência qtp implica convergência q.u. e portanto convergência em medida. Mas não em Lp como vimos no primeiro exemplo.

Exemplo. Seja a sequência em $[0,1]$ dada por $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{[0,1/2]}$, $f_3 = \chi_{[1/2,1]}$ e etc. Em geral $f_n = \chi_{[j,j+1]/2^k}$ onde $n = 2^k + j$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$ (dividimos o $[0,1]$ em 2^k intervalos e pegamos a função característica de cada um deles. Esta sequência é muito interessante. Com efeito, $f_n \to f$ em $L^p([0,1])$ e $f_n \xrightarrow{\mu} f$ onde $f \equiv 0$. Mas não converge q.u nem q.t.p. Mais ainda, para cada x é possível escolher uma subsequência f_{n_j} que converge para g_x onde $g_x(x) = 1$ e $g_x(t) = 0$ se $x \neq t$. Tudo isso acontece em $X = [0,1]$ com medida finitam, e dominada por f_1. O que acontece com a sequência $g_n = 2^k f_n$, onde a relação entre k e n é como acima?

$$\begin{tikzcd}
L^p \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & q.u \arrow[d] \arrow[dl, shift left] \\
q.t.p \arrow[r, shift left] \arrow[ur, shift left] & EM \arrow[l, dotted, shift left]
\end{tikzcd}$$

Agora falta ver o que acontece com uma sequência f_n dominada por uma função g em L^p.

E ver se nos casos em que a implicação não se verifica, existe uma subsequência que verifica a convergência procurada. Por exemplo, se $f_n \to_\mu f$ então existe subsequência $f_{n_k} \to f\ qtp$. Incluindo os casos em que $\mu(X)\ finita$ e f_n dominada por uma função em L^p.