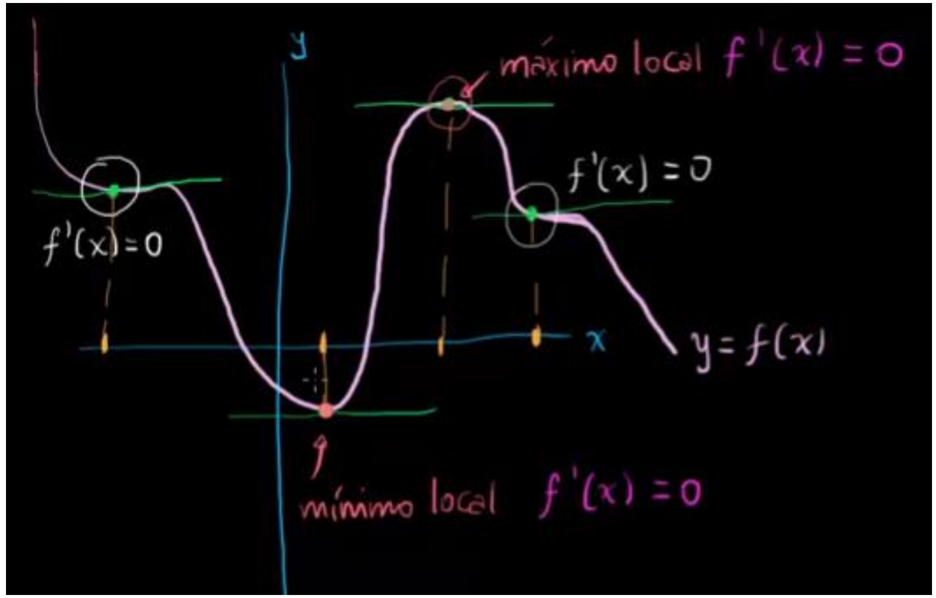
PESQUISA OPERACIONAL I

Prof. Dr. José Vicente Caixeta Filho
Depart. de Economia, Administração e Sociologia
ESALQ - Universidade de São Paulo
jose.caixeta@usp.br

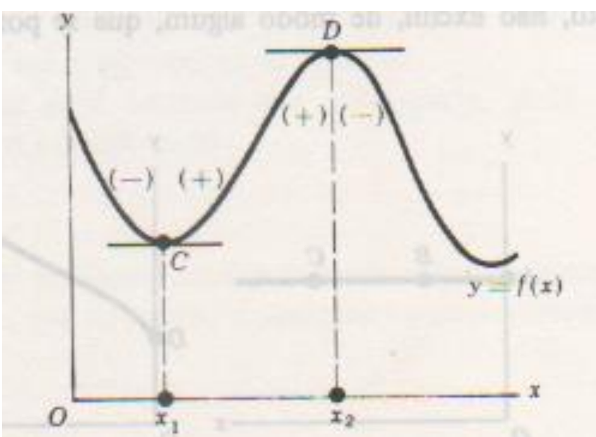
OTIMIZAÇÃO CLÁSSICA

PONTOS ESTACIONÁRIOS (derivada primeira nula)

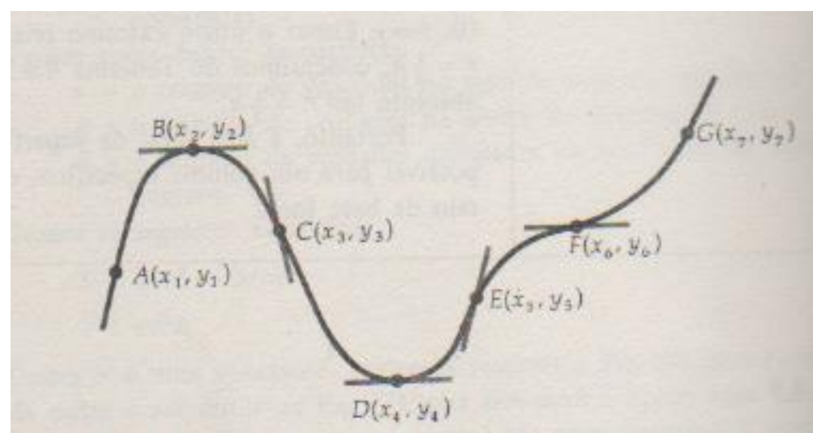


Fonte: Gusalberto8 (2011)

PONTOS DE MÍNIMO (derivada primeira nula e derivada segunda positiva) E DE MÁXIMO (derivada primeira nula e derivada segunda negativa)

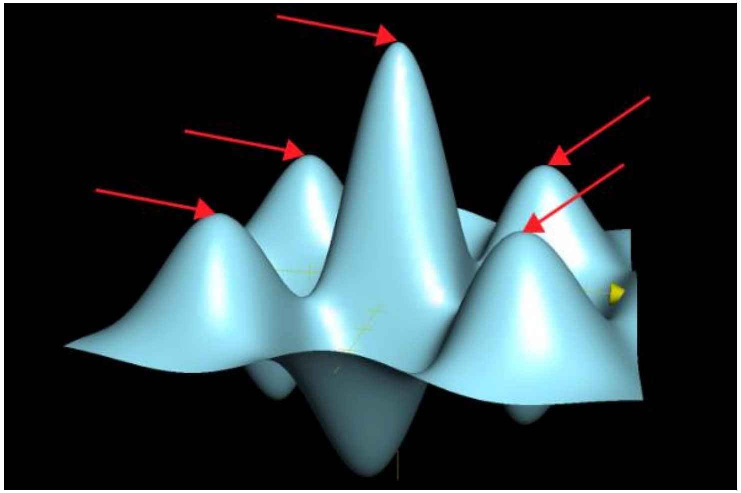


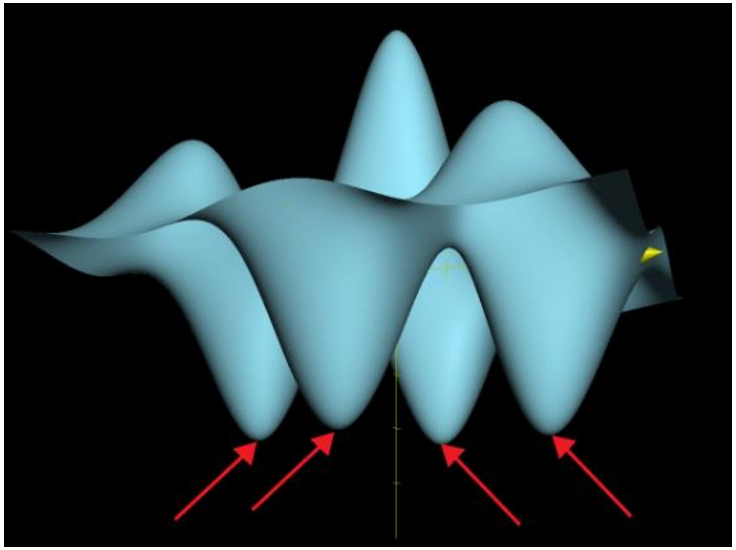
Fonte: Chiang (1982)



Fonte: Leithold (1977)

PONTOS DE MÁXIMO





PONTOS DE MÍNIMO

Fonte: Khan Academy (2020)

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

ESTRUTURAÇÃO DE MODELOS NÃO-LINEARES

Embora a abstração relativa à linearização possa ser uma vantagem interessante quando da formulação de modelos matemáticos (tendo em vista a versatilidade de algoritmos tais como o Simplex, assim como a larga escala de software disponível para Programação Linear), não há como não considerar a característica de não-linearidade de uma série de sistemas agroindustriais. Por exemplo, não necessariamente uma função custo unitário de transporte é constante e linear, podendo assumir o comportamento de uma função tipo hipérbole equilátera, implicando que para maiores distâncias está associado um menor custo unitário de transporte (vide Figura 1).

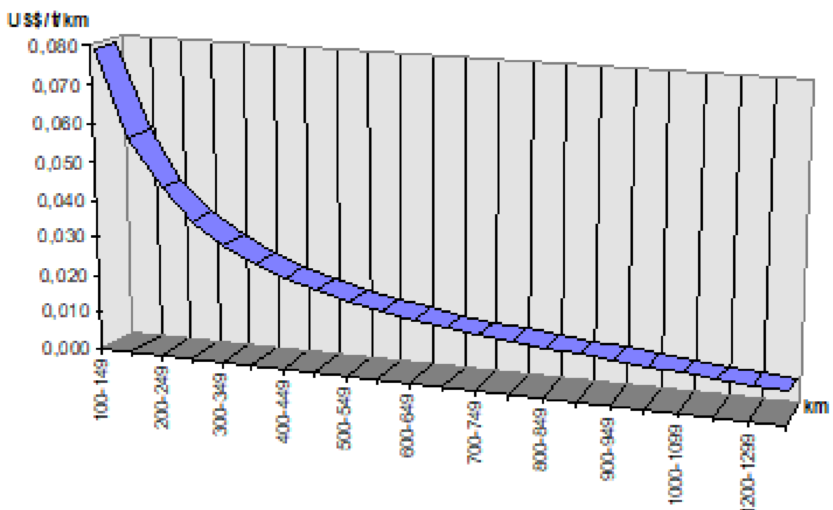


Figura 1 **-** Comportamento do frete unitário praticado para o milho, em função da distância percorrida. *Fonte: SIFRECA (1997).*

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Diferentemente da Programação Linear, não existe um algoritmo "universal" para Programação Não-Linear, uma vez que os graus e complexidades de não-linearidade podem ser bastante diversificados. Por exemplo, pode ser identificada a não-linearidade restrita à função objetivo, que pode variar para cada uma das variáveis; pode ser exclusiva a uma ou mais restrições; ou ainda envolver tanto restrições quanto a função objetivo. Portanto, para cada combinação específica de classes de não-linearidade podem ser recomendados algoritmos específicos, que por sinal continuam a ebulir pela literatura especializada. Ressalte-se também que, diferentemente de programação linear, para programação não-linear ainda não há garantia da obtenção do chamado ótimo global, mas somente de pontos de ótimo local. Inclusive, em vista dessa limitação, a otimização global vem justificando um grande número de trabalhos de pesquisa.

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Dada a função de utilidade:

$$U = x_1 x_2 + 2x_1 \qquad (1)$$

sujeita à restrição orçamentária:

$$4x_1 + 2x_2 = 60 \qquad (2)$$

calcular o nível de utilidade máximo.

Note-se, inicialmente, que a não-linearidade do problema está restrita à função objetivo, tendo em vista o produto cruzado entre as duas variáveis de decisão do problema.

Reescrevendo a função objetivo e a restrição orçamentária, tem-se:

$$U = x_1 (x_2 + 2) \qquad (3)$$

sujeito a:

$$x_2 = 30 - 2x_1 \qquad (4)$$

Substituindo a restrição na função objetivo:

$$U = x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 \qquad (5)$$

$$U = 30x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2 \qquad (6)$$

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Calculando as condições de 1a. e 2a. ordem de otimização clássica:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -4x_1 + 32 = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -4 < 0 \qquad (8)$$

Portanto, se houver um ponto de ótimo, este deverá ser um ponto de máximo (derivada segunda negativa). Assim sendo, como:

$$-4x_1 + 32 = 0 \rightarrow x_1 = 8 \qquad (9)$$

Substituindo na restrição:

$$\rightarrow x_2 = 14 \qquad (10)$$

o que resulta num valor máximo de **128** para a função Utilidade.

Observe-se que para esse problema, há ainda a peculiaridade da restrição ser do tipo "igualdade", e envolvendo apenas duas variáveis, o que facilita a utilização do artifício de substituição da restrição na própria função objetivo.

Para casos que envolvam restrições do tipo "igualdade", mas com mais restrições, o método do multiplicador de Lagrange é recomendado.

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Método do Multiplicador de Lagrange

Dada uma função genérica Z:

$$Z = f(x, y) \quad (11)$$

sujeito a:

$$g(x, y) = c \quad (12)$$

O chamado Lagrangeano correspondente (L) pode ser construído como sendo:

$$L = f(x, y) + \lambda\,[c - g(x, y)] \quad (13)$$

onde λ é o chamado multiplicador de Lagrange.

Os valores estacionários para a função L podem ser obtidos a partir da aplicação das condições da otimização clássica, ou seja:

$$L_\lambda \left(= \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = c - g(x, y) = 0 \quad (14)$$

$$L_x \left(= \frac{\partial L}{\partial x} \right) = f_x - \lambda\, g_x = 0 \quad (15)$$

$$L_y = \left(= \frac{\partial L}{\partial y} \right) = f_y - \lambda\, g_y = 0 \quad (16)$$

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Perceba-se que com a aplicação das condições de 1a. ordem da otimização clássica ao *Lagrangeano*, a expressão (14), referente a λ, passa a representar a restrição original (12), enquanto (15) e (16) são as expressões pertinentes às variáveis x_1 e x_2, tal como numa situação irrestrita. Assim sendo, o sistema de equações simultâneas (14), (15) e (16) nada mais é que uma representação alternativa ao problema formulado em (11) e (12), só que mais facilmente solucionável.

Portanto, para o exemplo representado pelas equações (1) e (2):

$$L = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda\left(60 - 4x_1 - 2x_2\right) \qquad (17)$$

as equações (14), (15) e (16) podem ser resolvidas simultaneamente, de tal forma que:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{x_2 + 2}{4} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{x_1}{2} \qquad (20)$$

Das equações (19) e (20), obtém-se:

$$x_2 = 2x_1 - 2 \qquad (21)$$

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Substituindo (21) em (18):

$$60 - 4x_1 - 2(2x_1 - 2) = 0 \tag{22}$$

$$x_1 = 8 \tag{23}$$

Substituindo (23) em (21):

$$x_2 = 2(8) - 2 \tag{24}$$

$$x_2 = 14 \tag{25}$$

Substituindo (25) em (19):

$$x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \tag{26}$$

$$\lambda = 4 \tag{27}$$

Substituindo (23), (25) e (27) em (17):

$$L = 128 \tag{28}$$

o que confirma o resultado obtido anteriormente.

Ressalte-se que se trata de um procedimento, diferentemente do anterior, em que várias restrições tipo "equação" podem ser consideradas. Entretanto, não se trata do método mais adequado para o tratamento de problemas não-lineares que envolvam restrições tipo "inequações".

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Método Gráfico

Tomando como referência um exemplo, envolvendo apenas duas variáveis, com a não-linearidade específica a uma das restrições:

$$\text{Max} \quad \pi = 2x_1 + x_2$$

sujeito a:

$$-x_1^2 + 4x_1 - x_2 \leq 0$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1 \,,\, x_2 \geq 0$$

Pode ser observado, a partir da Figura 2, que a região viável não é um polígono convexo, tal como se espera em um problema de programação linear. Os vértices dessa região viável podem ser classificados como pontos de ótimo local, sendo o ponto de máximo global representado pelo ponto P (6; 0).

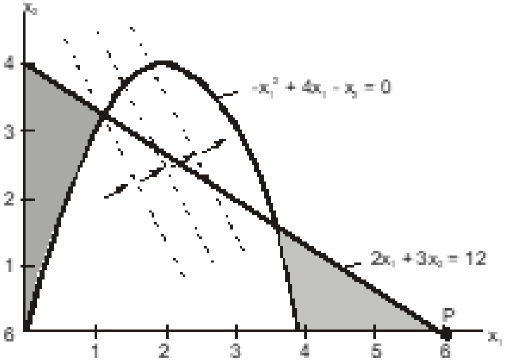


Figura 2 - Resolução gráfica de problema com restrição não-linear.

Embora extremamente didático, e interessante para a solução de modelos não-lineares que envolvam inequações, o método gráfico apresenta as limitações naturais associadas à impossibilidade de solução de problemas com maior número de variáveis.

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Condições de Karush-Kuhn-Tucker

Como já discutido anteriormente, não se tem à disposição, ainda, algoritmos eficientes que garantam a obtenção de eventuias pontos de ótimo global para modelos não-lineares. Além disso, não há técnicas que possam ser consideradas como suficientemente genéricas para a identificação de pontos de ótimo local. Em vista disso, são apresentadas a seguir as chamadas condições de Karush-Kuhn-Tucker, as quais possibilitam somente um teste de otimalidade; não se tratando assim de um mecanismo para a obtenção da SOLUÇÃO ÓTIMA.

Tome-se como exemplo um problema extremamente simples, tal como apresentado a seguir.

$$\text{Max} \quad \pi = f(x_1)$$

sujeito a

$$x_1 \geq 0$$

As três possibilidades de solução para tal problema estão ilustradas na Figura 3.

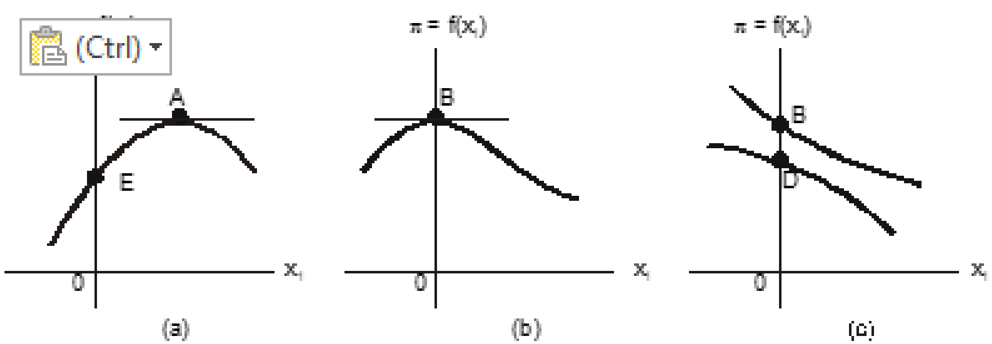


Figura 3 - Possíveis soluções para um problema de maximização de função objetivo não-linear, sujeita a restrição de não-negatividade.

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Note que, para o diagrama (a), ao ponto A corresponde uma solução dita interna, com um valor de $x_1 > 0$ e $f'(x_1) = 0$; para o diagrama (b), uma solução de fronteira, com $x_1 = 0$ e $f'(x_1) = 0$ para o ponto B; e para o diagrama (c), soluções de fronteira são representadas pelos pontos C e D ($x_1 = 0$), mas com $f'(x_1) < 0$. Assim sendo, de uma maneira genérica, são observadas as seguintes relações para essas três possibilidades de solução:

$$f'(x_1) \leq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 f'(x_1) = 0$$

Assim sendo, a partir desse tipo de observação, percebeu-se que podem ser definidas algumas condições que devem ser satisfeitas por um ponto de ótimo local em um problema de otimização condicionada, de características não-lineares, e envolvendo restrições tipo inequações.

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Será mostrada a aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker para o exercício apresentado na sequência (trata-se de uma padronização válida para problemas de maximização com restrições do tipo $\leq$ e para problemas de minimização com restrições do tipo $\geq$ - as transformações devidas têm que ser feitas para esses padrões, de tal forma que isso possibilitará a aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker conforme ilustrado a seguir).

$$\text{Max } f(x,y) = 12xy - 3y^2 - x^2$$

sujeita a

$$x + y \leq 16$$

Solução:

$$L = f(x, y) + \lambda\,(16 - x - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 12y - 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 12x - 6y - \lambda = 0$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda(16 - x - y) = 0$$

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

1ª POSSIBILIDADE: $\lambda = 0$

$$\left.\begin{aligned} 12y - 2x &= 0 \\ 12x - 6y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 6y \\ x &= 0{,}5y \end{aligned}\right] \rightarrow x = y = 0 \rightarrow f(0,\ 0) = 0$$

2ª POSSIBILIDADE: $(16 - x - y) = 0$

$$\downarrow$$

$$x = 16 - y$$

Substituindo:

$$\left.\begin{aligned} 12y - 2(16 - y) + \lambda &= 0 \\ 12(16 - y) - 6y + \lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow 12y - 32 + 2y = 192 - 12y - 6y$$

$$32y = 224$$

$$y = 7$$
$$x = 9$$
$$\lambda = 66$$

$$f(9,7) = 528$$

Portanto, dado que se trata de um problema de maximização, a melhor solução corresponde a f(9,7), que tem um valor para a função objetivo ("528") superior ao observado para f(0,0).

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

Portanto, a principal diferença da "otimização clássica" (quando se tem uma estrutura não-linear com restrições) dá conta da análise do comportamento de:

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Para um problema com uma restrição, têm que ser analisadas 2 possibilidades; para duas restrições, 4 possibilidades; para n restrições, 2^n possibilidades.

E, relembrando, as condições de Karush-Kuhn-Tucker funcionarão como um teste de "otimalidade" dos pontos candidatos a solução ótima, sendo que o "melhor" ponto será considerado um "ótimo local" (algoritmos ainda se encontram em desenvolvimento para a obtenção do "ótimo global").

Fonte: Caixeta-Filho (2015)

REFERÊNCIAS

CAIXETA-FILHO, J. V. **Pesquisa operacional: técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais**. São Paulo: Atlas, 2015.

CHIANG, A. C. **Matemática para Economistas**. Edusp-McGraw-Hill, São Paulo, 1982.

GUSALBERTO8. **Valores extremos, pontos críticos e derivadas**. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Ir4cZNfyZ70. Inserido em 17 de maio de 2011.

KHAN ACADEMY. **Máximos, mínimos e pontos de sela**. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points. Acesso em 10 de novembro de 2020.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Harbra, São Paulo, 1977.

LIÇÃO DE CASA:

Discorra sobre problemas – no mundo de negócios em geral – que poderiam ser representados por modelos não-lineares (até 19/11, quinta, 19h – limite máximo de 1 página A4)