

PRIMEIRA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $u \in C^\infty(U)$.

(1,0 ponto) a) Para cada $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x, r)} \subset U$, calcule

$$U(x, r) = \frac{d^2}{dr^2} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y).$$

(1,0 ponto) b) Mostre $\lim_{r \rightarrow 0^+} U(x, r) = \frac{1}{2} \Delta u(x)$.

(1,0 ponto) c) Use os resultados acima para demonstrar novamente uma proposição vista em sala de aula: Se $u \in C^\infty(U)$ é uma função para a qual vale a fórmula do valor médio, ou seja, $u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y)$ para todo $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x, r)} \subset U$, então a função u é harmônica.

Exercício 2. (1,5 ponto) Seja $n \geq 2$. Ache todas as funções $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que sejam harmônicas e limitadas. (Dica: singularidade)

Exercício 3. (1,25 ponto) a) Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, mostre que para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $f \in C^\infty(U)$, vale $\partial_{x_i}(fu) = (\partial_{x_i}f)u + f(\partial_{x_i}u)$. (Dica: Use a definição de derivada de distribuições e multiplicação por função com distribuições e calcule $\partial_{x_j}(fu)(\varphi)$ e $(\partial_{x_i}f)u(\varphi) + f(\partial_{x_i}u)(\varphi)$, em que $\varphi \in C_c^\infty(U)$.)

(1,25 ponto) b) Seja K a solução fundamental da equação do calor em \mathbb{R}^n . Sabemos que $\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = \delta_0$, ou seja,

$$(0.1) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) - \Delta \varphi(x, t) \right) dx dt = \varphi(0, 0), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que a função K_c definida abaixo:

$$K_c(x, t) = e^{-ct} K(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-ct}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é a solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + c$, $c > 0$ é uma constante. (Dica: O que ocorre se colocarmos $e^{-ct}\varphi(x, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ na integral 0.1?) OBS: Não é necessário usar o item a.

(0,5 ponto) c) Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ache uma fórmula dada por uma integral em termos de f e K_c para uma solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + cu(x, t) = f(x, t).$$

Exercício 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 . Considere o seguinte problema

$$(0.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \Delta u(x, t) - u(x, t), & (x, t) \in U \times]0, \infty[\\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) &= 0, & (x, t) \in \partial U \times]0, \infty[\\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in U \end{aligned}$$

em que o vetor $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal unitária que aponta para fora de U , $u_0 \in C^2(\overline{U})$ é tal que $\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) = 0$ para $x \in \partial U$.

(1,25 ponto) a) Mostre que se $u \in C^2(\overline{U} \times [0, \infty[)$ é solução da Equação (0.2), então

$$E(t) = \int_U u(x, t)^2 dx, t \in [0, \infty[$$

é uma função não crescente. Dica: Se f e g são funções de classe $C^1(\overline{U})$, então

$$\int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i dS(x).$$

(1,25 ponto) b) Mostre que existe no máximo uma solução em $C^2(\overline{U} \times [0, \infty[)$ do Problema (0.2).

FORMULÁRIO. (NEM TUDO É NECESSÁRIO)

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < r\}$, $\overline{B(x, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| \leq r\}$, $\partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| = r\}$ e $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B(0, 1)$.

$$|B(x, r)| := \int_{B(x, r)} dy \text{ é o volume da bola } B(x, r)$$

$$|\partial B(x, r)| := \int_{\partial B(x, r)} dS(y) \text{ é a área da bola } \partial B(x, r)$$

$$|\mathbb{S}^{n-1}| := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dS(y) \text{ é a área da bola unitária}$$

Por exemplo, se $n = 2$, então $|B(x, r)| = \pi r^2$ e $|\partial B(x, r)| = 2\pi r$. As médias são definidas como

$$\int_{B(x, r)} f(y) dy = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy \text{ e } \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y).$$

Lema 5. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $x \in U$, $r > 0$ e $\overline{B(x, r)} \subset U$. Logo

- 1) $\int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + rz) r^{n-1} dS(z)$.
- 2) $|\partial B(x, r)| = r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|$.
- 3) $\int_{B(x, r)} f(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + sz) dS(z) \right) s^{n-1} ds = \int_0^r \int_{\partial B(x, s)} f(y) dS(y) ds$.
- 4) $|B(x, r)| = \frac{r^n |\mathbb{S}^{n-1}|}{n}$.

Teorema 6. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:

- 1) A função u é harmônica, ou seja, $u \in C^2(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.
- 2) A função u é contínua e $u(x) = \int_{B(x, r)} u dy$, para todo $\overline{B(x, r)} \subset U$.
- 3) A função u é contínua e $u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u dS$, para todo $\overline{B(x, r)} \subset U$.
- 4) A função $u \in C^\infty(U)$ e $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in U$.

Teorema 7. (Remoção de singularidades) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0 \in U$. Considere uma função $u : U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica tal que

$$(0.3) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|u(x)|}{\ln(|x - x_0|)} &= 0, & n = 2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^{n-2} |u(x)| &= 0, & n > 2 \end{aligned}$$

Então existe o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$, o limite é finito e a função $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada abaixo é harmônica

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x), & x = x_0 \end{cases}.$$

Teorema 8. (Princípio de Reflexão) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que, se $(x', x_n) \in U$, então $(x', -x_n) \in U$. Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(x', x_n) \in U; x_n = 0\} \\ U_+ &= \{(x', x_n) \in U; x_n > 0\} \\ U_- &= \{(x', x_n) \in U; x_n < 0\} \end{aligned}$$

Seja $u : U_0 \cup U_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $u|_{U_+} : U_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in U_+$. Se $u(x) = 0$ para todo $x \in U_0$, então a função $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida abaixo é harmônica:

$$v(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & x \in U_+ \\ 0, & x \in U_0 \\ -u(x', -x_n), & x \in U_- \end{cases}.$$

Teorema 9. (Liouville) Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica e limitada. Logo u é a função constante.

Definição 10. Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(U)$ é um funcional linear $u : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo.

Exemplo 11. A distribuição Delta de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 12. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $u \in \mathcal{D}'(U)$. Definimos a distribuição $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(U)$, chamada de derivada da distribuição u de ordem α , da seguinte forma: $\partial^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi)$, $\phi \in C_c^\infty(U)$, em que usamos a notação $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$.

Definição 13. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $g \in C^\infty(U)$. Então definimos a distribuição $gu \in \mathcal{D}'(U)$ da seguinte maneira: $gu(\phi) = u(g\phi)$, $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Definição 14. Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é chamada de **solução fundamental** do operador $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, se satisfizer $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = \delta_0$.

Em particular, se $u = T_g$, em que g é uma função contínua ou localmente integrável (lembramos que $T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx$), então u será uma solução fundamental se, e somente se,

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x) dx = \phi(0), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Exemplo 15. A solução fundamental do calor $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ é a distribuição associada a função dada por

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Definição 16. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Logo

$$\int_{\partial U} F(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_U \nabla \cdot F(x) dx,$$

em que $\nu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U .

Proposição 17. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1(\bar{U})$. Logo

$$(0.4) \quad \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) dx = - \int_U f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial U} f(x) g(x) \nu_i(x) dS(x),$$

em que $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U .