PRIMEIRA PROVA - EDP - MAP 5712 (MAP 0413)

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração, a não ser, claro, quando estamos pedindo para que sejam demonstrados.

Boa Prova!

Exercício 1. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $u \in C^\infty(U)$.

(1,0 ponto) a) Para cada $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset U$, calcule

$$U(x,r) = \frac{d^2}{dr^2} ⨍_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

(1,0 ponto) b) Mostre $\lim_{r \to 0^+} U(x,r) = \frac{1}{2}\Delta u(x)$.

(1,0 ponto) c) Use os resultados acima para demonstrar novamente uma proposição vista em sala de aula: Se $u \in C^\infty(U)$ é uma função para a qual vale a fórmula do valor médio, ou seja, $u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ para todo $x \in U$ e $r > 0$ tal que $\overline{B(x,r)} \subset U$, então a função u é harmônica.

Exercício 2. (1,5 ponto) Seja $n \geq 2$. Ache todas as funções $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que sejam harmônicas e limitadas. (Dica: singularidade)

Exercício 3. (1,25 ponto) a) Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, mostre que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $u \in \mathcal{D}'(U)$ e $f \in C^\infty(U)$, vale $\partial_{x_i}(fu) = (\partial_{x_i} f) u + f(\partial_{x_i} u)$. (Dica: Use a definição de derivada de distribuições e multiplicação por função com distribuições e calcule $\partial_{x_j}(fu)(\varphi)$ e $(\partial_{x_i} f) u(\varphi) + f(\partial_{x_i} u)(\varphi)$, em que $\varphi \in C_c^\infty(U)$.)

(1,25 ponto) b) Seja K a solução fundamental da equação do calor em $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\frac{\partial K}{\partial t} - \Delta K = \delta_0$, ou seja,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) - \Delta \varphi(x,t) \right) dxdt = \varphi(0,0), \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{0.1}$$

Mostre que a função K_c definida abaixo:

$$K_c(x,t) = e^{-ct} K(x,t) = \begin{cases} \frac{e^{-ct}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

é a solução fundamental de $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + c$, $c > 0$ é uma constante. (Dica: O que ocorre se colocarmos $e^{-ct}\varphi(x,t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ na integral 0.1?) OBS: Não é necessário usar o item a.

(0,5 ponto) c) Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ache uma fórmula dada por uma integral em termos de f e K_c para uma solução de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) + cu(x,t) = f(x,t).$$

Exercício 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Considere o seguinte problema

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right), & (x,t) \in U \times]0,\infty[\\ u(x,t) & = 0, & (x,t) \in \partial U \times]0,\infty[\\ u(x,0) & = u_0(x), & x \in U \end{array}, \tag{0.2}$$

em que $u_0 \in C^2(\overline{U})$ é tal que $u_0(x) = 0$ para $x \in \partial U$ e as funções $a_{ij} : U \to \mathbb{R}$ são tais que

i) $a_{ij} \in C^1(\overline{U})$.

ii) $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii) Existe $a_0 > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. (Em particular, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \geq 0$).

(1,25 ponto) a) Mostre que se $u \in C^2(\overline{U} \times [0,\infty[$ é solução da Equação (0.2), então

$$E(t) = \int_U u(x,t)^2 dx, \ t \in [0,\infty[$$

é uma função não crescente. Dica: Se f e g são funções de classe $C^1(\overline{U})$, então

$$\int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx = -\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i dS(x).$$

(1,25 ponto) b) Mostre que existe no máximo uma solução em $C^2(\overline{U} \times [0,\infty[)$ do Problema (0.2).

Formulário. (Nem tudo é necessário)

$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y-x|<r\}$, $\overline{B(x,r)}=\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y-x|\le r\}$, $\partial B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n;\ |y-x|=r\}$ e $\mathbb{S}^{n-1}:=\partial B(0,1)$.

$$|B(x,r)|:=\int_{B(x,r)}dy \ \text{ é o volume da bola } B(x,r)$$
$$|\partial B(x,r)|:=\int_{\partial B(x,r)}dS(y) \ \text{ é a área da bola } \partial B(x,r)$$
$$\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|:=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}dS(y) \ \text{ é a área da bola unitária}$$

Por exemplo, se $n=2$, então $|B(x,r)|=\pi r^2$ e $|\partial B(x,r)|=2\pi r$. As médias são definidas como

$$⨍_{B(x,r)} f(y)dy=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)dy \text{ e } ⨍_{\partial B(x,r)}f(y)dS(y)=\frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)}f(y)dS(y).$$

Lema 5. *Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $f:U\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $x\in U$, $r>0$ e $\overline{B(x,r)}\subset U$. Logo*
1) $\int_{\partial B(x,r)}f(y)dS(y)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(x+rz)r^{n-1}dS(z)$.
2) $|\partial B(x,r)|=r^{n-1}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|$.
3) $\int_{B(x,r)}f(y)dy=\int_0^r\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(x+sz)dS(z)\right)s^{n-1}ds=\int_0^r\int_{\partial B(x,r)}f(y)dS(y)ds$.
4) $|B(x,r)|=\frac{r^n\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{n}$.

Teorema 6. *Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $u:U\to\mathbb{R}$ uma função. As seguintes propriedades abaixo são equivalentes:*
1) A função u é harmônica, ou seja, $u\in C^2(U)$ e $\Delta u(x)=0$ para todo $x\in U$.
2) A função u é contínua e $u(x)=⨍_{B(x,r)}udy$, para todo $\overline{B(x,r)}\subset U$.
3) A função u é contínua e $u(x)=⨍_{\partial B(x,r)}udS$, para todo $\overline{B(x,r)}\subset U$.
4) A função $u\in C^\infty(U)$ e $\Delta u(x)=0$ para todo $x\in U$.

Teorema 7. *(Remoção de singularidades) Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $x_0\in U$. Considere uma função $u:U\backslash\{x_0\}\to\mathbb{R}$ harmônica tal que*

$$\begin{array}{rcl}\lim_{x\to x_0}\frac{|u(x)|}{\ln(|x-x_0|)} & = & 0,\quad n=2\\ \lim_{x\to x_0}|x-x_0|^{n-2}|u(x)| & = & 0,\quad n>2\end{array}\tag{0.3}$$

Então existe o limite $\lim_{x\to x_0}u(x)$, o limite é finito e a função $v:U\to\mathbb{R}$ dada abaixo é harmônica

$$v(x)=\begin{cases}u(x), & x\ne x_0\\ \lim_{x\to x_0}u(x), & x=x_0\end{cases}.$$

Teorema 8. *(Princípio de Reflexão) Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto tal que, se $(x',x_n)\in U$, então $(x',-x_n)\in U$. Consideremos os seguintes conjuntos:*

$$U_0=\left\{(x',x_n)\in U;\ x_n=0\right\}$$
$$U_+=\left\{(x',x_n)\in U;\ x_n>0\right\}$$
$$U_-=\left\{(x',x_n)\in U;\ x_n<0\right\}$$

Seja $u:U_0\cup U_+\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $u|_{U_+}:U_+\to\mathbb{R}$ é de classe C^2 e $\Delta u(x)=0$, para todo $x\in U_+$. Se $u(x)=0$ para todo $x\in U_0$, então a função $v:U\to\mathbb{R}$ definida abaixo é harmônica:

$$v(x',x_n)=\begin{cases}u(x',x_n), & x\in U_+\\ 0, & x\in U_0\\ -u(x',-x_n), & x\in U_-\end{cases}.$$

Teorema 9. *(Liouville) Seja $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função harmônica e limitada. Logo u é a função constante.*

Definição 10. Uma distribuição $u\in\mathcal{D}'(U)$ é um funcional linear $u:C_c^\infty(U)\to\mathbb{R}$ contínuo.

Exemplo 11. A distribuição Delta de Dirac $\delta_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\delta_0(\phi)=\phi(0)$, $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 12. Seja $U\subset\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ e $u\in\mathcal{D}'(U)$. Definimos a distribuição $\partial^\alpha u\in\mathcal{D}'(U)$, chamada de derivada da distribuição u de ordem α, da seguinte forma: $\partial^\alpha u(\phi)=(-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\phi)$, $\phi\in C_c^\infty(U)$, em que usamos a notação $\partial^\alpha:=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$.

Definição 13. Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto, $u\in\mathcal{D}'(U)$ e $g\in C^\infty(U)$. Então definimos a distribuição $gu\in\mathcal{D}'(U)$ da seguinte maneira: $gu(\phi)=u(g\phi)$, $\phi\in C_c^\infty(U)$.

Definição 14. Uma distribuição $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ é chamada de **solução fundamental** do operador $P(\partial)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha\partial^\alpha$, $a_\alpha\in\mathbb{R}$, se satisfizer $\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha\partial^\alpha u=\delta_0$.

Em particular, se $u = T_g$, em que g é uma função contínua ou localmente integrável (lembramos que $T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)dx$), então u será uma solução fundamental se, e somente se,

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^\alpha \phi}{\partial x^\alpha}(x)dx = \phi(0),\ \forall \phi \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Exemplo 15. A solução fundamental do calor $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ é a distribuição associada a função dada por

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Definição 16. (Teorema da Divergência) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $F : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Logo

$$\int_{\partial U} F(x) . \nu(x)\, dS(x) = \int_U \nabla . F(x)\, dx,$$

em que $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ é o vetor normal unitário que aponta para fora de U.

Proposição 17. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e f e g duas funções em $C^1\left(\overline{U}\right)$. Logo*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g(x)dx = -\int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial U} f(x)g(x)\nu_i(x)dS(x), \tag{0.4}$$

em que $i \in \{1, ..., n\}$ e $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$ é a normal a ∂U no ponto x e que aponta para fora de U.