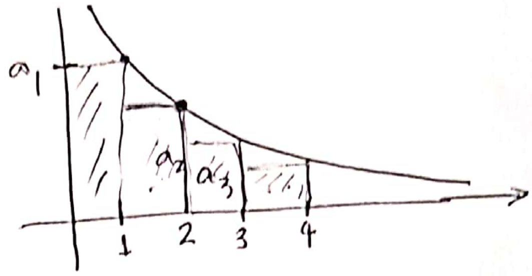
12/11/20

Critério da Integral

dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

Seja $f(x)$ uma função definida $[1, \infty[$ tal que $f(n) = a_n$.

Se f for $\begin{cases} \text{contínua} \\ \text{positiva} \\ \text{decrescente} \end{cases}$



então:

(a) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ for convergente $\Rightarrow$ $\sum a_n$ é convergente

(b) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge.

Exemplo 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots}^{< \int_1^{\infty} f}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, \infty[$ $\begin{cases} \text{• contínua pois o denominador não se anula} \\ \text{• positiva} \\ \text{• decrescente; } f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} < 0 \quad \forall x \geq 1 \end{cases}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \boxed{\lim_{t \to \infty} \int_1^t} x^{-2} dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^t = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = 1.$$

Logo, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge. $\Rightarrow$ Pelo Critério da Integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Euler: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

$\nexists$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Teorema $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{converge, se } p > 1 \\ \text{diverge se } p \leq 1. \end{cases}$ Decorar!

$p \in \mathbb{R}$ fixado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{(3/2)}}$$

Critério da Comparação

$\sum a_n$, $\sum b_n$ séries tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(a) Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

(b) Se $\sum a_n$ diverge então $\sum b_n$ diverge.

Dem. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = T_n$

(a) $\sum b_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\exists \lim T_n = T$

Além disso, $\underbrace{S_n \leq T_n \leq T}$

$\Downarrow$

$(S_n)_n$ é limitada.

$$S_{n+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n, \quad \forall n.$$

$\Rightarrow (S_n)$ é crescente.

(Teorema 5) $\Rightarrow$ (S_n) converge $\Leftrightarrow$ $\exists \lim S_n = S$

Logo a série $\sum a_n$ converge.

(b) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

e S_n cresce

Se Σa_n diverge $\Rightarrow$ $\lim S_n = +\infty$.

$$S_n \leq T_n \quad , \forall n$$

$\Rightarrow \lim T_n = +\infty$ e Σb_n diverge.

Exemplos

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ converge ou diverge?

Vamos comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

$$\frac{1}{3^n+1} \leq \frac{1}{3^n} \quad , \forall n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ é uma série geométrica

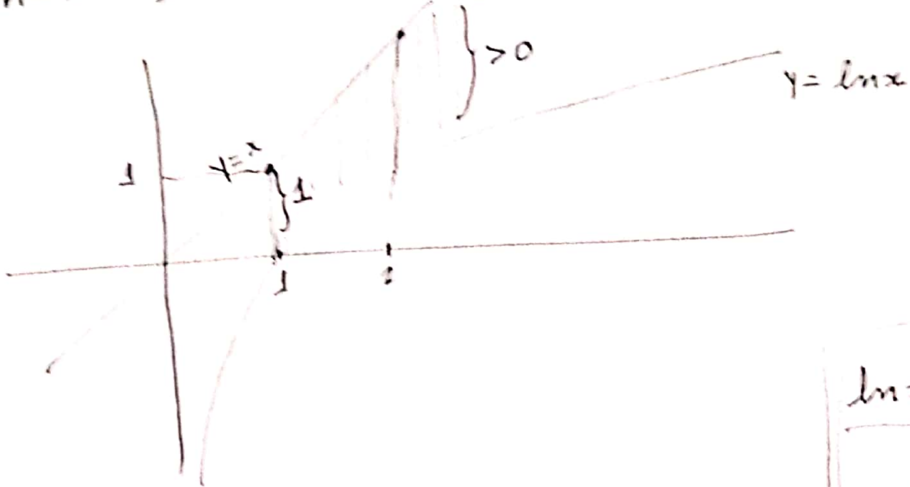
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

razão: $\frac{1}{3}$ (<1)

$\Rightarrow \Sigma \frac{1}{3^n}$ é convergente.

Pelo Critério da Comparação, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ tb converge

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots$



$$\boxed{\begin{array}{l} \ln x < x, \ \forall x \geq 2 \\ \hline f(x) = x - \ln x \ \text{(cresce)} \\ f(1) = 1 \\ f(x) > 1, \ \forall x > 1 \end{array}}$$

$$0 < \ln(n) < n, \quad \forall n \geq 2$$

$$\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}.$$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ é divergente (harmônica)

$\Longrightarrow$ ~~[illegible]~~ $\displaystyle\sum \frac{1}{\ln(n)}$ é divergente.

Critério da comparação

Critério da Razão

Seja $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$.

(a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ e $L < 1$ então $\sum a_n$ converge.

(b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ e $L > 1$ ou se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$

então $\sum a_n$ diverge

(c) Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, este critério não nos permite concluir nada sobre a convergência da Série.

Exemplos:

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\underline{e}} > 1.$$

$\Longrightarrow$ pelo critério da razão, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ é <u>divergente</u>.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (é divergente)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right)}$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

---

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (convergente)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$