Probabilidade II

1)

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com

$$P(X_n = \pm n^{\alpha}) = \frac{1}{6n^{2\alpha-2}} = \frac{1}{2}(1 - P(X_n = 0).$$

Para que valores de α as condições de Luapunov

$$\frac{1}{s_n^{2+1}} \Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k|^3] \to 0,$$

quando $n \to \infty$, estão satisfeitas?

Solução

Observe que $E[X_j] = 0$ e que $Var(X_j) = j^{2\alpha} \frac{1}{6j^{2\alpha-2}} = \frac{j^2}{6}$.
Portanto

$$s_n^2 = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{k^2}{6};$$

$$\frac{s_n^2}{n^{2+1}} \to \frac{1}{18}; \frac{s_n}{n^{\frac{3}{2}}} \to \frac{1}{[(18)]^{\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{s_n^3}{n^{\frac{9}{2}}} \to (\frac{1}{18})^{\frac{3}{2}}.$$

Por outro lado

$$\sum_{k=1}^{n} E[|X_j|^3] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{\alpha+2}}{6}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} E[|X_j|^3]}{n^{\alpha+2+1}} \to \frac{1}{6(\alpha+3)},$$

Portanto

$$\frac{1}{s_n^3}\Sigma_{k=1}^{n} E[|X|^3] =$$

$$\frac{n^{\frac{9}{2}}}{s_n^3}.\frac{\sum_{k=1}^{n} E[|X_j|^3]}{n^{\alpha+3}}.\frac{n^{\alpha+3}}{n^{\frac{9}{2}}} \to$$

$$(18)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{6(\alpha+3)}.\frac{1}{n^{1,5-\alpha}} \to 0,$$

quando $\alpha > 1,5$.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuidas no intervalo $(-a_n, a_n)$. Encontre condições para que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|y-E[X_k]|>\varepsilon s_n\}} (y - E[X_k])^2 dF_k(y) = 0.$$

Solução

Note que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = \frac{a_n^2}{3}$.
Assim

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{3} \to$$

$$s_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{3}} \to \frac{s_n}{a_n} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{3}}}{a_n} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{3.a_n^2}}.$$

Portanto

$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{a_n} = \infty$ se $\forall M > 0, \exists n_0 | n \geq n_0, \rightarrow \frac{s_n}{a_n} > M$. Tomando $M = \frac{1}{\varepsilon}$ temos $\varepsilon s_n > a_n$ região em que $dF_k(y) = 0$.

3) 2) Seja $(X_n) n \geq 1$ uma sequẽncia de variáveis aleatórias i.i.d. X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{4x}{\theta^2}, \quad 0 < x \leq \frac{\theta}{2};$$

$$f(x) = \frac{4}{\theta} - \frac{4x}{\theta^2}, \quad \frac{\theta}{2} < x \leq \theta.$$

a) Calcule 0 terceiro quartil (ξ) da distribuição de X. Calcule $f(\xi)$.

b) Baseado noterceiro quartil amostral ξ, encontre um intervalo de confiança com $0,90$ de confiança para θ.

c) Formule um teste de hipótese bilateral, $H_0 : \theta = \theta_0$ X $H_1 : \theta \neq \theta_0$, ao nível de $0,1$ de significância.

Solução

(a)

O terceiro quartil ξé a solução da equação $F(\xi) = 0,75$, isto é

$$\int_0^{\frac{\theta}{2}} \frac{4x}{\theta^2} dx + \int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta} (\frac{4}{\theta} - \frac{4x}{\theta^2}) dx = \frac{-2\xi^2}{\theta^2} + \frac{4\xi}{\theta} - 1 = 0,75$$

equivalente a $\frac{-2\xi^2}{\theta^2} + \frac{4\xi}{\theta} - 1,75 = 0$.

A solução é $\xi = 0,65\theta$. Portanto $f(\xi) = f(0,65\theta) = \frac{4}{\theta} - \frac{4.0,65\theta}{\theta^2} = \frac{1,4}{\theta}$.

b) A variância da variável padronizada é $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{(f(\xi))^2} = \frac{0,75.0,25}{\frac{1,96}{\theta^2}} = 0,1\theta^2$, e o desvio padrão $\gamma = 0,31.\theta$.

Temos que

$$\frac{\sqrt{n}(X_{(k;n)} - 0,65\theta)}{0,31.\theta} \rightarrow^D N(0,1).$$

$$P(-1,64 \leq \frac{\sqrt{n}(X_{(k;n)} - 0,65\theta)}{0,31.\theta} \leq 1,64) = 0,9 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}} \leq \frac{(X_{(k;n)} - 0,65\theta)}{0,31.\theta} \leq \frac{1,64}{\sqrt{n}}) = 0,9 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 2,1 \leq \frac{X_{(k;n)}}{0,31.\theta} \leq \frac{1,64}{\sqrt{n}} + 2,1) = 0,9 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{1}{\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 2,1} \leq \frac{0,31.\theta}{X_{(k;n)}} \leq \frac{1}{\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 2,1}) = 0,9 \leftrightarrow$$

$$P(\frac{X_{(k;n)}}{0,31.(\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 2,1)} \leq \theta \leq \frac{X_{(k;n)}}{0,31.(\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 2,1)}) = 0,9$$

Concluimos que um intervalo de confiança com $0,90$ de confiança para θ é:

$$(\frac{x_{(k;n)}}{0,31.(\frac{1,64}{\sqrt{n}} + 2,1)}; \frac{x_{(k;n)}}{0,31.(\frac{-1,64}{\sqrt{n}} + 2,1)})$$

Utilizamos a equivalência entre um teste de hipótese bilateral, ao nível de 10% de significância com o intervalo de confiança de 90% de confiança. Se θ_0 não pertencer ao intervalo, rejeitamos H_0.