A TEORIA DA ESCOLHA: TEORIA DA UTILIDADE SOB INCERTEZA

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

COPELAND, T.; WESTON, J.; SHASTRI, K. Financial Theory and Corporate Policy. Reading, Addison-Wesley, 1988 – cap. 3

Axiomas da Escolha sob Incerteza

"Queremos encontrar os princípios matematicamente completos que definem o 'comportamento racional' dos participantes em uma economia social e derivar, à partir deles, as características gerais daquele comportamento" (J. Von Neumann e O. Morgenstern, 1947)

A teoria da escolha do investidor é apenas uma das facetas da Teoria da Utilidade

⇨ Para desenvolver uma teoria sobre a tomada de decisão sob incerteza, é necessário formular alguns pressupostos precisos sobre o comportamento dos indivíduos, de forma a um conjunto mínimo de condições para definir o comportamento consistente e racional

AXIOMAS DA UTILIDADE CARDINAL

Axioma 1: Comparabilidade

(ou Axioma da Completude)

Dado o conjunto de alternativas incertas (S), um indivíduo pode dizer tanto que:

(i) o resultado x é preferido ao resultado y: $x \succ y$; ou

(ii) y é preferido a x: $y \succ x$; ou

(iii) é indiferente entre x e y: $x \sim y$

Axioma 2: Transitividade

(ou Axioma da Consistência)

Se um indivíduo prefere x a y e y a z, então x é preferido a z: se $x \succ y$ e $y \succ z$ ⇨ $x \succ z$.

Se um indivíduo é indiferente entre x e y, assim como entre y e z, então ele é indiferente entre x e z: se ***x* ~ *y*** e ***y* ~ *z*** ⇨ ***x* ~ *z***

Indivíduos sempre tomam decisões completamente racionais e são capazes de tomar essas decisões entre milhares de alternativas

Axiomas da Escolha sob Incerteza

Axioma 3: Independência Forte

Suponha que possamos construir uma loteria em que um indivíduo tenha probabilidade α de receber o resultado x e probabilidade $(1-\alpha)$ de receber o resultado y: loteria G(x, y: α)

A independência forte diz que se um indivíduo é indiferente entre x e y, então ele também será indiferente em uma primeira aposta estabelecida entre x com probabilidade α e o resultado mutuamente exclusivo z, assim como em uma segunda aposta estabelecida entre y com probabilidade α e o mesmo resultado mutuamente exclusivo z

Ou seja: se ***x ~ y*** ⇨ ***G(x, z: α) ~ G(y, z: α)***

Axioma 4: Mensurabilidade

Se o resultado y é menos preferido do que x, mas mais preferido do que z, então há uma probabilidade α única, de forma que o indivíduo é indiferente entre y e uma loteria entre x com probabilidade α e z com probabilidade $(1-\alpha)$

Se: $x \succ y \succeq z$ e $x \succeq y \succ z$ ⇨ existe uma probabilidade única α tal que: ***y ~ G(x, z: α)***

(o motivo para o sinal de "tão bom quanto" ou preferível ou indiferente estar em apenas um dos lados da relação de preferências é eliminar a possibilidade x ~ y ~ z, pois, neste caso, qualquer valor de α satisfaz a condição de indiferença requerida pela loteria)

O Axioma da Independência Forte é o mais difícil de compreender!

Considere o exemplo sobre um par de sapatos: resultado x = ganhar o pé esquerdo; resultado y = ganhar o pé direito; e z = ganhar o pé direito. Imagine duas loterias: (1) 50% de chance de ganhar x (esquerdo) ou z (direito); e (2) 50% de chance de ganhar y (direito) ou z (direito) – nunca podemos ganhar os dois pés.

Se fôssemos indiferentes entre escolher o pé direito ou o pé esquerdo ⇨ independência forte implica que também seríamos indiferentes entre as duas loterias. O ponto importante para a independência forte é que o resultado z é sempre mutuamente excludente, o que é crítico para a independência forte

Axiomas da Escolha sob Incerteza

Axioma 5: Ordenamento (Ranking)

Se as alternativas y e u estão em algum lugar entre x e z e podemos estabelecer loterias de tal forma que um indivíduo seja indiferente entre y e uma loteria entre x (com probabilidade α_1) e z, assim como também é indiferente entre u e uma segunda loteria entre x (com probabilidade α_2) e z. Se $\alpha_1 > \alpha_2$, então: y é preferido a u.

Se: $x \succeq y \succeq z$ e $x \succeq u \succeq z$ ⇨ se y ~ G(x, z: α_1) e u ~ G(x, z: α_2), logo:

- ✓ Se $\alpha_1 > \alpha_2$ ⇨ $y \succ u$
- ✓ Se $\alpha_1 = \alpha_2$ ⇨ y ~ u

Como indivíduos ordenam as diversas combinações de alternativas de risco?

Vamos utilizar os axiomas da utilidade cardinal para mapear as preferências em utilidades mensuráveis

Propriedades da Função Utilidade:

1) Preservação da ordem: se a utilidade de x é maior do que a utilidade de y, U(x) > U(y) ⇨ x é preferido a y; e
2) Utilidade Esperada: a utilidade esperada é utilizada para ordenar alternativas de risco, ou seja:

$$\boldsymbol{U[G(x, y: \alpha)] = \alpha . U(x) + (1 - \alpha) . U(y)}$$

Considere dois resultados intermediários x e y, do conjunto de resultados de risco (S) que tem como menor valor a e maior valor b. Pelo Axioma 4 (Mensurabilidade), podemos escolher as probabilidades únicas para x e y de forma a construir as seguintes loterias:

x ~ $\boldsymbol{G(a, b: \alpha(x))}$ e y ~ $\boldsymbol{G(a, b: \alpha(y))}$

Função Utilidade

Pelo Axioma 5 (Ordenamento), as probabilidades $\boldsymbol{\alpha(x)}$ e $\boldsymbol{\alpha(y)}$ podem ser interpretadas como as utilidades numéricas que ordenam unicamente x e y as seguinte forma:

Se $\alpha(x) > \alpha(y) \;\Rightarrow\; x \succ y.$

Se $\alpha(x) = \alpha(y) \;\Rightarrow\; x \sim y.$

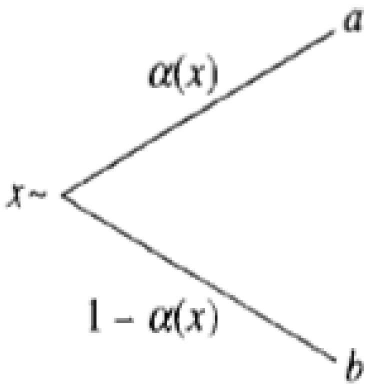
Se $\alpha(x) < \alpha(y) \;\Rightarrow\; x \prec y.$

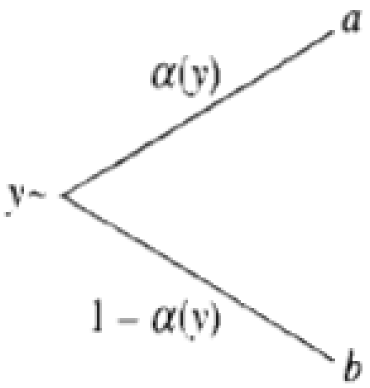
Assim, desenvolvemos uma função utilidade que preserva a ordem. Os resultados mínimo e máximo (a e b, respectivamente) podem ser associados a qualquer valor (exemplo: a = 0 e b = 100)

⇨ Ao formar loterias, podemos associar números da utilidade cardinal aos resultados intermediários x e y

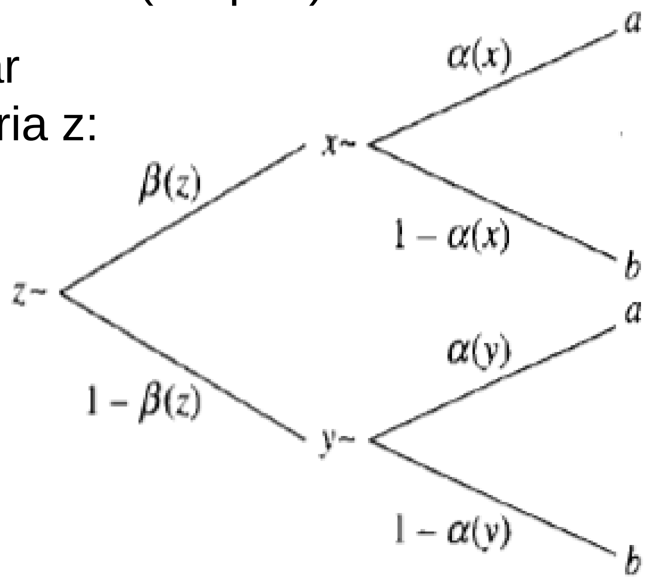
Vamos agora utilizar a utilidade esperada para ordenar alternativas de risco (Prop. 2)!

Considere as seguintes loterias:





Vamos considerar uma terceira loteria z:



Podemos utilizar Axioma 3 (independência forte) para mostrar que a escolha de z não afeta a relação entre x e y

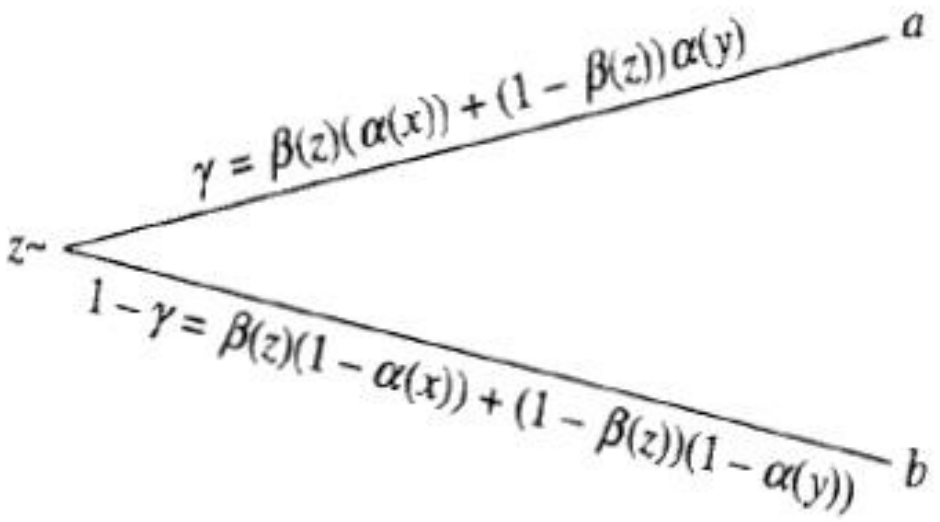
Função Utilidade

Pelo Axioma 4, deve existir uma probabilidade única $\beta(z)$ que torna o resultado z indiferente à loteria entre x e y

Ao seguir os ramos do resultado z, é possível ver que:

- z é indiferente a ***a*** com probabilidade $\gamma = \beta(z).\alpha(x) + \left(1 - \beta(z)\right).\alpha(y)$
- z é indiferente a ***b*** com probabilidade $(1 - \gamma)$

A figura abaixo mostra a relação entre o resultado z e os resultados a e b:



A loteria pode ser escrita como:

$$z \sim G\left[a, b : \beta(z).\alpha(x) + \left(1 - \beta(z)\right).\alpha(y)\right]$$

⇨ Pelos Axiomas 4 e 5, temos que as utilidades de x e de y podem ser representadas pelas suas probabilidades, ou seja: $U(x) = \alpha(x)$ e $U(y) = \alpha(y)$

⇨ A loteria acima pode ser escrita como:

$$z \sim G\left[a, b : \beta(z).U(x) + \left(1 - \beta(z)\right).U(y)\right]$$

Novamente pelos Axiomas 4 e 5, a probabilidade única do resultado z pode ser usada como uma medida cardinal de sua utilidade relativa aos elementos limites a e b, assim:

$$\boldsymbol{U(z) = \beta(z).U(x) + \left(1 - \beta(z)\right).U(y)}$$

Função Utilidade

A função correta para ordenar alternativas de risco é a Utilidade Esperada: combinação linear dos resultados das utilidades

De forma geral, podemos escrever a utilidade esperada da riqueza da seguinte forma:

$$\boxed{E[U(W)] = \sum_i p_i . U(W_i)}$$

Dados os 5 axiomas do comportamento do investidor racional e o pressuposto adicional de que todos os investidores preferem mais riqueza do que menos, podemos afirma que:

Todos os investidores sempre buscam maximizar sua utilidade esperada da riqueza

(função Utilidade Esperada é a função objetivo de todos os investidores)

Por meio das propriedades das funções utilidade, vamos demonstrar como a função utilidade pode ser construída

Seja a utilidade igual a -10 unidades para uma perda de $1.000

⇨ ***pergunta: dada uma loteria com probabilidade α de ganhar $1.000 e probabilidade $(1-\alpha)$ de perder $1.000, qual probabilidade torna o investidor indiferente entre a loteria e ganhar $0 com certeza?***

Matematicamente, temos**:**

$$\mathbf{0 \sim G(1.000, -1.000{:}\ \alpha)} \text{ ou } \mathbf{U(0) = \alpha . U(1000) + (1-\alpha) . U(-1000)}$$

Função Utilidade

- ✓ Suponha que $\alpha = 0{,}6$ para que o investidor seja indiferente entre a loteria e o resultado \$0 com certeza.
- ✓ Assumindo que a utilidade de \$0 com certeza seja igual a zero, substituindo U(-1000) = -10 e $\alpha = 0{,}6$, a utilidade de ganhar \$1.000 é dada por:

$$U(1000) = \frac{(1-\alpha).U(-1000)}{\alpha}$$

$$U(1000) = \frac{(1-0{,}6).(-10)}{0{,}6} = 6{,}7 \text{ unidades}$$

Se repetirmos o processo anterior para diferentes resultados (payoffs), é possível desenvolver a função utilidade

A tabela ao lado mostra várias loterias, suas probabilidades e a utilidade dos *payoffs* para um investidor avesso ao risco

Perda	Ganho	Prob. Ganho	Utilidade Ganho	Utilidade Perda
- 1,000	1,000	0.60	6.7	- 10.0
- 1,000	2,000	0.55	8.2	- 10.0
- 1,000	3,000	0.50	10.0	- 10.0
- 1,000	4,000	0.45	12.2	- 10.0
- 1,000	5,000	0.40	15.0	- 10.0
- 1,000	6,000	0.35	18.6	- 10.0
- 1,000	7,000	0.30	23.3	- 10.0
- 2,000	2,000	0.75	8.2	- 24.6
- 3,000	3,000	0.80	10.0	- 40.0
- 4,000	4,000	0.85	12.2	- 69.2
- 5,000	5,000	0.90	15.0	- 135.0

Função Utilidade

- ✓ As funções utilidade são específicas para cada indivíduo: não há como comparar a função utilidade de um indivíduo com o de outro
- ✓ Podemos falar em aumento ou diminuição da utilidade marginal. Se duas funções utilidade fornecerem os mesmos resultados para todas as alternativas, então a utilidade marginal deve ser a mesma. Matematicamente:

$$\frac{\boldsymbol{U(x) - U(y)}}{\boldsymbol{\gamma(x) - \gamma(y)}} = \boldsymbol{constante}$$

Em que: $U(.)$ e $\gamma(.)$ são duas funções utilidade

⇨ Mudanças na utilidade entre dois níveis de riqueza possuem exatamente o mesmo significado para as duas funções utilidade: ou seja: uma função utilidade é apenas a transformação monotônica da outra

Definição de Aversão ao Risco

Considere que a utilidade marginal da riqueza é positiva: mais riqueza é sempre preferida a menos

Vamos estabelecer uma loteria entre dois resultados: ***a*** e ***b*** ⇨ probabilidade de receber a é igual a α; probabilidade de receber b é igual a $(1-\alpha)$. A loteria pode ser escrita como: $G(a,b:\alpha)$

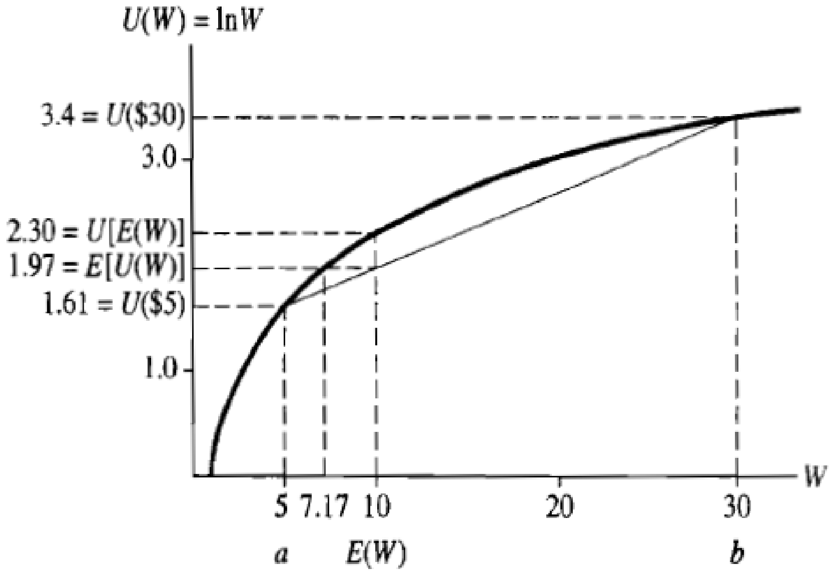
⇨ ***O indivíduo prefere o valor atuarial (resultado médio ou valor esperado, com certeza) ou a loteria?***

O indivíduo prefere receber $10 com certeza ou prefere apostar na loteria que paga $100 com probabilidade de 10% ou $0 com probabilidade de 90%?

- ✓ Amante do risco: indivíduo que prefere a loteria
- ✓ Neutro ao risco: indivíduo indiferente entre a loteria e o valor atuarial
- ✓ Avesso ao risco: indivíduo que prefere o valor atuarial com certeza

No gráfico ao lado, a utilidade da riqueza é dada pela função logarítmica: ***U(W) = ln (W)***

A loteria é: 80% de chance de ganhar $5 e 20% de chance de ganhar $30



W	U(W)
1	0
5	1.61
10	2.30
20	3.00
30	3.40

Definição de Aversão ao Risco

Valor Atuarial da Loteria:

O valor atuarial da loteria é seu resultado esperado:

E(W) = 0,80.$5 + 0,20.$30 = $10

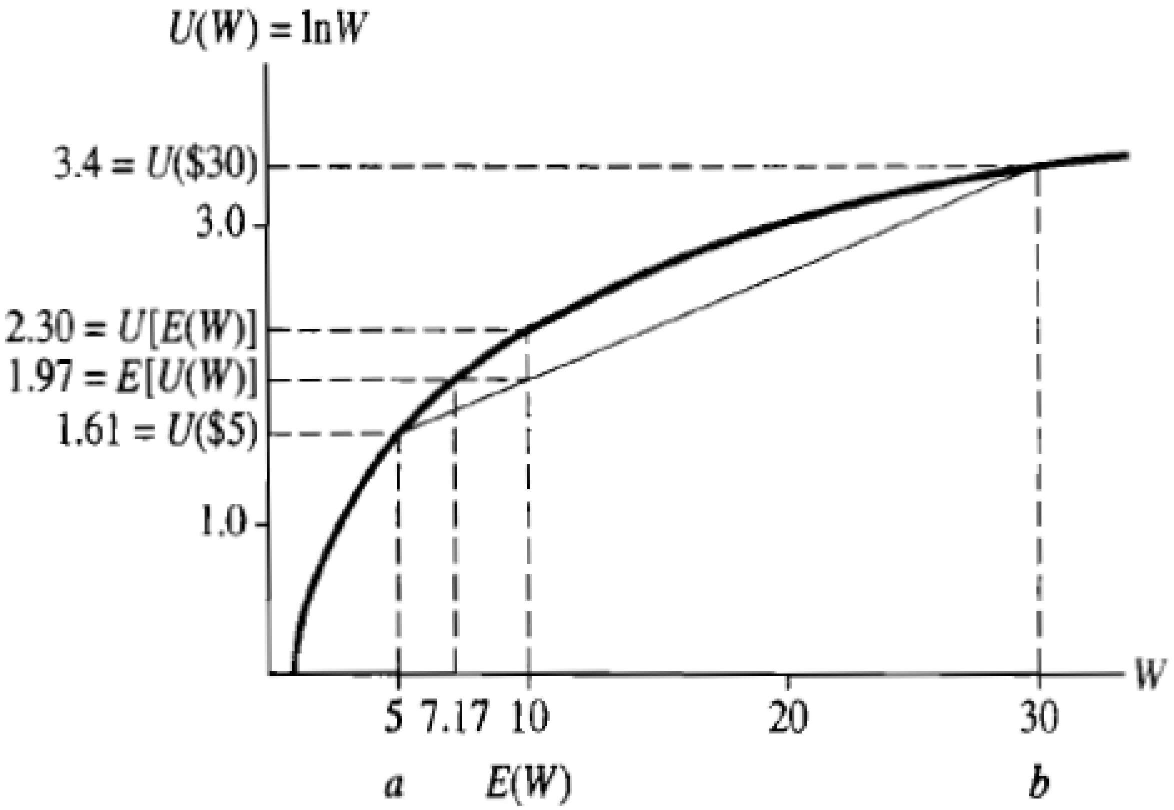
A utilidade da riqueza esperada pode ser lida diretamente da função utilidade: U[E(W)] = 2,30

Utilidade da loteria:

Pela função de utilidade esperada, a utilidade da loteria é igual à **utilidade esperada da riqueza (valor esperado da utilidade da riqueza)** fornecida pela loteria, ou seja:

E[U(W)] = 0,80.U($5) + 0,20.U($30)

E[U(W)] = 0,80.(1,61) + 0,20.(3,40) = 1,97



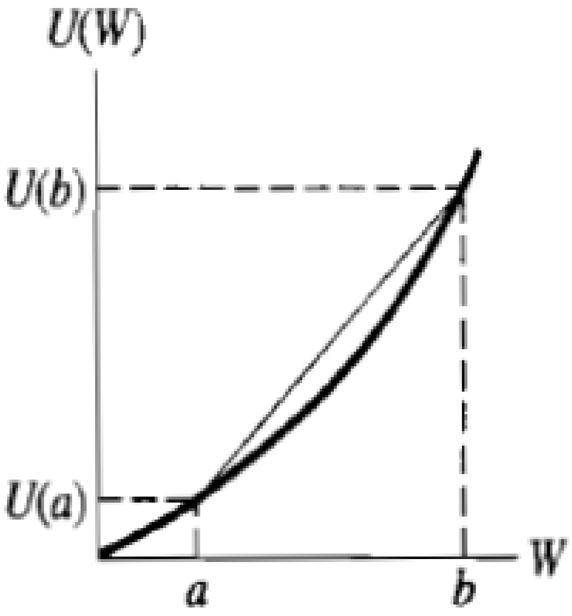
Se a utilidade da riqueza esperada é maior do que a utilidade esperada da riqueza: indivíduo avesso ao risco

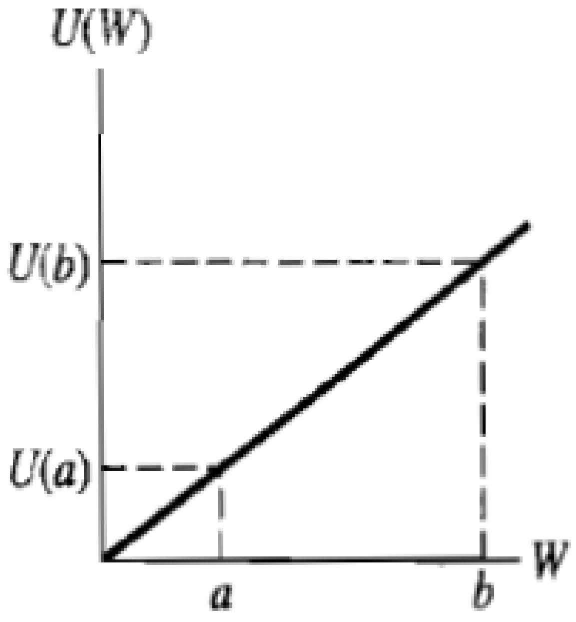
Definição de Aversão ao Risco

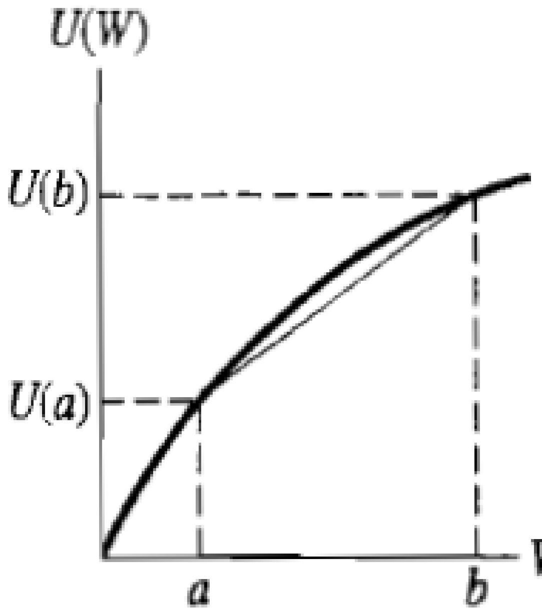
O indivíduo recebe mais utilidade pelo valor atuarial da loteria obtida com certeza do que com a própria loteria ⇨ indivíduo é avesso ao risco!

Graficamente e matematicamente, as definições são:

$U[E(W)] < E[U(W)]$ **Amante do Risco**	$U[E(W)] = E[U(W)]$ **Neutro ao Risco**	$U[E(W)] > E[U(W)]$ **Avesso ao Risco**
Função estritamente convexa	***Função linear***	***Função estritamente côncava***







Definição de Aversão ao Risco

Prêmio de Risco: valor máximo da riqueza que um indivíduo está disposto a abrir mão para evitar a loteria

Suponha que o Sr. Silva tem uma função utilidade logarítmica, riqueza corrente igual a $10 e se depara com a loteria representada no gráfico ao lado

Quanto o Sr. Silva está disposto a pagar não entrar na loteria?

Se ele não fizer nada, ele tem 80% de chance de perder $5 e 20% de chance de ganhar $20

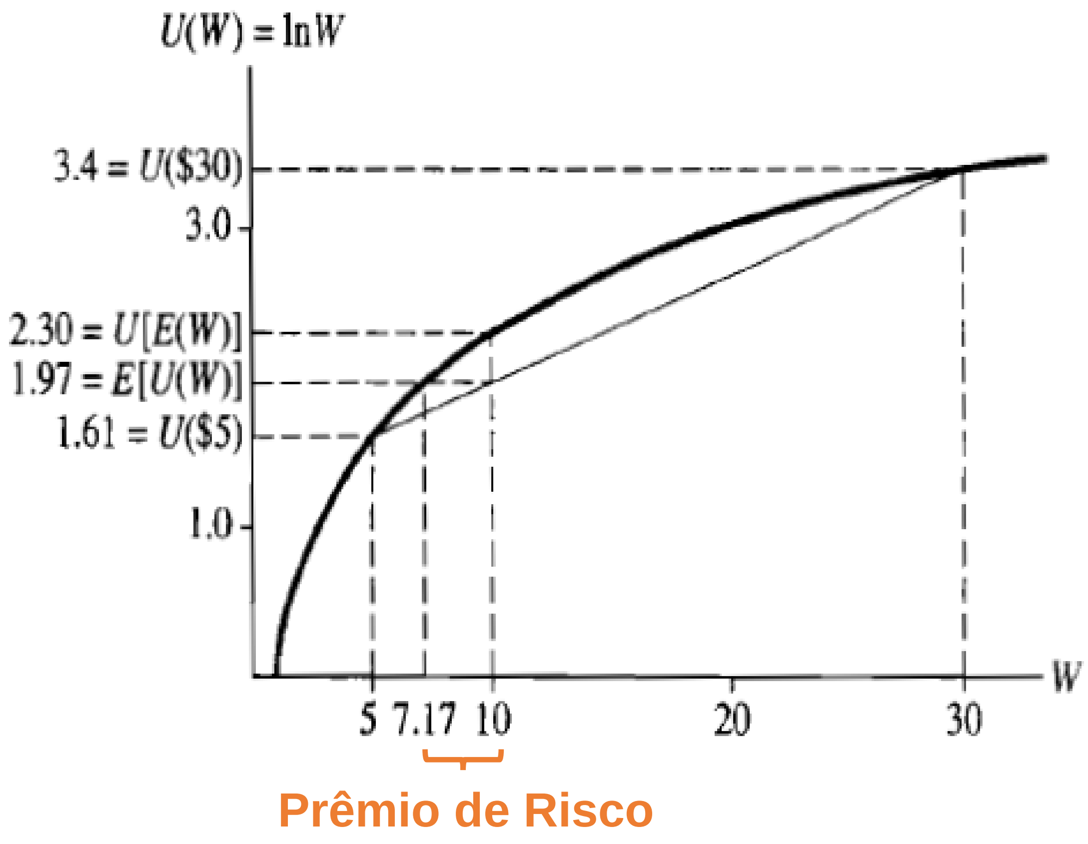
⇨ Sr. Silva tem um nível esperado de riqueza de $10 ***(igual à sua riqueza corrente)*** ⇨ valor atuarial

⇨ A utilidade esperada da loteria é igual a 1,97 unidades e o nível de riqueza equivalente a 1,97 unidades de utilidade é $7,17 [= *exp(1,97)*]

Para evitar a loteria, o Sr. Silva está disposto a pagar:

$10 - $7,17 = $ 2,83 ⇨ Prêmio de Risco de Markowitz

Se for oferecido um seguro contra a loteria para o Sr. Silva que custe até $2,83, ele comprará o seguro



Definição de Aversão ao Risco

Prêmio de Risco*: diferença entre a riqueza esperada de um indivíduo, dada a loteria, e o nível de riqueza que o indivíduo está disposto a aceitar com certeza se a loteria deixar de existir, ou seja, seu *equivalente certeza

Custo da loteria: diferença entre a riqueza corrente do indivíduo e seu equivalente certeza

Note que, no exemplo anterior, a riqueza esperada e a riqueza corrente são iguais no exemplo anterior ⇨ mudança esperada na riqueza é zero: não há diferente entre o prêmio de risco e o custo da loteria

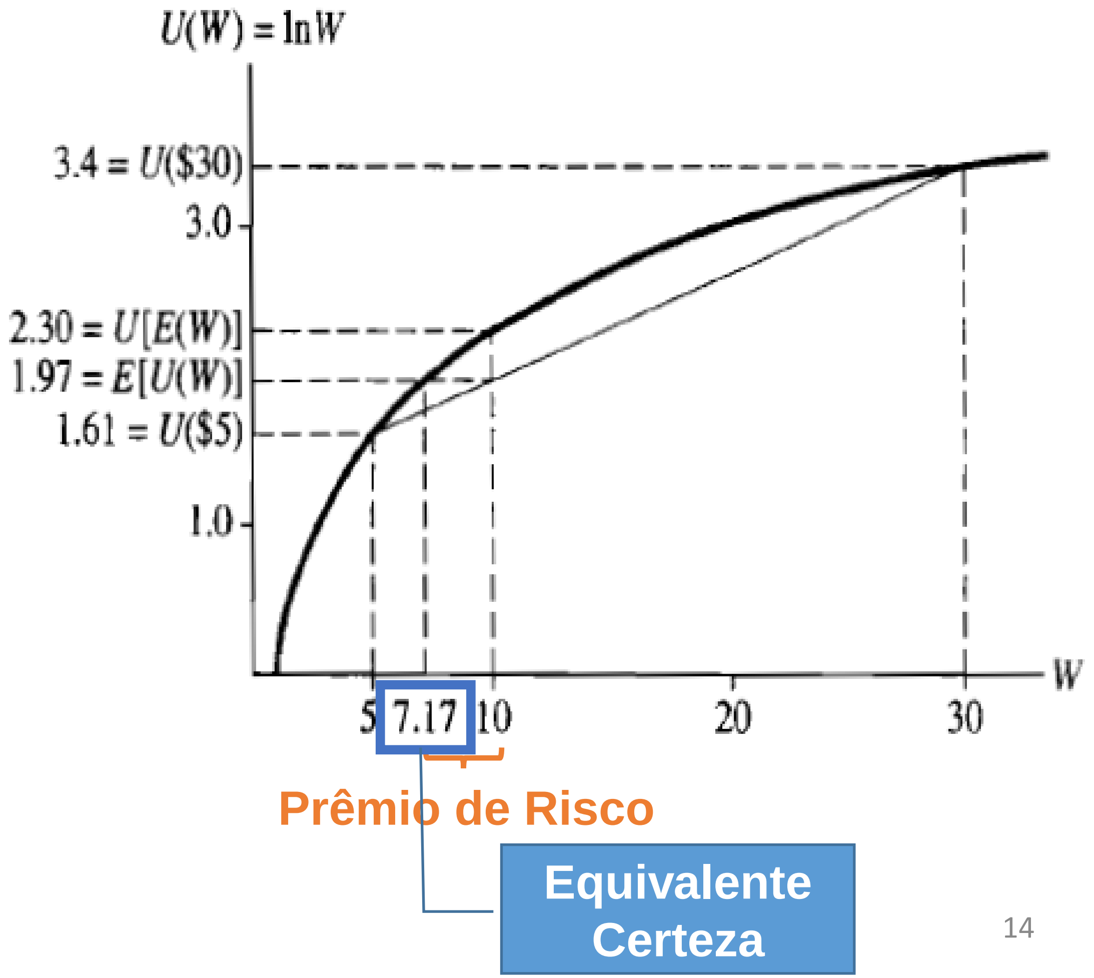
Considere o seguinte exemplo:

Um indivíduo avesso ao risco tem a mesma função logarítmica considerada anteriormente e a mesma renda corrente ($10)

- ✓ Loteria tem chance de 10% de ganhar $10 e 90% de chance de ganhar $100
- ✓ Renda corrente = $10
- ✓ Renda esperada:

E(W) = $10 + [0,10.$10 + 0,90.$100] = $101

Ou: E(W) = 0,10.$20 + 0,90.$110 = $101



Definição de Aversão ao Risco

Neste exemplo:

Utilidade esperada da riqueza esperada (valor atuarial):

$$U[E(W)] = \ln(101) = 4{,}62$$

Valor esperado da utilidade da riqueza (utilidade esperada da riqueza):

$$E[U(W)] = 0{,}10.U(\$20) + 0{,}90.U(\$110)$$

$$E[U(W)] = 0{,}10.(3{,}00) + 0{,}90.(4{,}70) = 4{,}53$$

Equivalente certeza = $92,76

⇨ ***Prêmio de Risco = riqueza esperada – equivalente certeza***

Prêmio de Risco = $101 - $92,76 = $8,24

Medida, em unidades monetárias, do prêmio de risco associado à loteria

Nesse caso, a loteria é favorável ⇨ indivíduo paga um prêmio positivo pela loteria

O custo da loteria é:

Custo da loteria = riqueza corrente – equivalente certeza

Custo da loteria = $10 - $92,76 = - $82,76

O indivíduo está disposto a pagar $82,76 para entrar na loteria (pagaria ainda mais se fosse menos avesso ao risco)

Para um indivíduo avesso ao risco, o prêmio de risco é sempre positivo, enquanto o custo da loteria pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo do risco da loteria e de quanto espera-se que a loteria mude a renda corrente

Vamos assumir que todos os indivíduos são avessos ao risco, ou seja:

(i) Utilidade marginal da riqueza é positiva $Umg(W) > 0$;

(ii) Utilidade marginal da riqueza é decrescente com o nível de riqueza: $dUMg(W) / dW < 0$

Definição de Aversão ao Risco

Definição específica para aversão ao risco de Pratt (1964) e Arrow (1971): seja um indivíduo com um montante corrente de riqueza (W); dê a ele o prêmio uma loteria atuarialmente neutra igual a $\tilde{Z}$ unidades monetárias $[\mathrm{E}(\tilde{Z}) = 0]$

Qual o prêmio de risco $\pi(W, \tilde{Z})$ deve ser adicionado à loteria de forma que esse indivíduo seja indiferente entre a loteria e o valor atuarial da loteria?

O prêmio de risco deve ser uma função do nível de riqueza W e da loteria $\tilde{Z}$. Matematicamente, π é definido pelo valor que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\underbrace{\mathrm{E}[\mathrm{U}(W + \tilde{Z})]}_{\text{Utilidade esperada do nível corrente de riqueza, dada a loteria}} = \underbrace{U[W + \mathrm{E}(\tilde{Z}) - \pi(W, \tilde{Z})]}_{\text{Utilidade do nível corrente de riqueza, mais a utilidade do valor atuarial da loteria, menos o prêmio de risco}}$$

Vamos usar a aproximação em série de Taylor para expandir a função utilidade da riqueza ao redor de ambos os lados da equação

Do lado direito, temos: $U[W + \mathrm{E}(\tilde{Z}) - \pi(W, \tilde{Z})] = U[W - \pi(W, \tilde{Z})]$, pois $\mathrm{E}(\tilde{Z}) \equiv 0$, de forma que a expansão de Taylor é:

$$U[W - \pi] = U(W) - \pi . U'(W) + \text{termos de ordem máxima de } \pi^2$$

Definição de Aversão ao Risco

A expansão de Taylor para o lado esquerdo é:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{U}\left(W+\tilde{Z}\right)\right] = E\left[U(W)+\tilde{Z}.U'(W)+\frac{1}{2}.\tilde{Z}^2.U"(W) + \text{termos da ordem máxima de } \tilde{Z}^3\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{U}\left(W+\tilde{Z}\right)\right] = U(W)+\frac{1}{2}.\sigma_Z^2.U"(W) + \text{termos de ordem menor do que } \sigma_Z^2$$

O resultado acima decorre de:

- ✓ $\mathrm{E}[\mathrm{U}(W)] = U(W)$: riqueza corrente não é aleatória
- ✓ $\mathrm{E}\left(\tilde{Z}\right) \equiv 0$: o risco é atuarialmente neutro
- ✓ $E[\tilde{Z}^2] = \sigma_Z^2$: porque $\sigma_Z^2 \equiv \mathrm{E}[\left(\tilde{Z}\right) - \mathrm{E}\left(\tilde{Z}\right)]^2$

Podemos, então, escrever que:

$$U(W) - \pi.U'(W) + \cdots = U(W) + \frac{1}{2}.\sigma_Z^2.U"(W) + \cdots$$

Resolvendo para o prêmio de risco, temos:

$$\boldsymbol{\pi = \frac{1}{2}.\sigma_Z^2.\left(-\frac{U"(W)}{U'(W)}\right)}$$

Medida do prêmio de risco de Arrow – Pratt

Como $\frac{1}{2}.\boldsymbol{\sigma_Z^2}$ é sempre positivo, o sinal do prêmio de risco é determinado pelo sinal do termo entre parênteses

Em que: $\boldsymbol{\sigma_Z^2}$ é a variância do prêmio da loteria

Definição de Aversão ao Risco

Vamos definir a medida de **Aversão ao Risco Absoluta (ARA)** como:

$$\boldsymbol{ARA = -\frac{U"(W)}{U'(W)}}$$

⇨ ARA é a medida de aversão para um dado nível de riqueza

Como ARA muda com o nível de riqueza? ARA provavelmente diminui com o aumento da riqueza

Se multiplicarmos ARA pelo nível de riqueza, obtemos a **Aversão ao Risco Relativa (ARR)**:

$$\boldsymbol{RRA = -W.\frac{U"(W)}{U'(W)}}$$

A aversão ao risco relativa constante implica que um indivíduo terá aversão ao risco constante para uma perda proporcional da riqueza, embora a perda absoluta aumente com a riqueza

Função utilidade Quadrática:

$$U(W) = aW - bW^2$$

Primeira derivada (Utilidade Marginal):

$$U'(W) = a - 2b\mathrm{W}$$

Segunda derivada (mudança da Umg):

$$U''(W) = -2b$$

Logo:

✓ $ARA = -\frac{-2b}{a-2bW}; \frac{dARA}{dW} > 0$

✓ $RRA = \frac{2b}{{}^{a}/_{W}-2b}; \frac{dRRA}{dW} > 0$

A função utilidade quadrática exibe ARA e RRA crescentes, o que é pouco intuitivo:

⇨ De acordo com este resultado, um indivíduo com RRA crescente deveria se tornar mais avesso ao risco para um dado percentual de perda da riqueza conforme a riqueza aumenta

Definição de Aversão ao Risco

Friend e Blume (1975) utilizaram dados de dividendos de carteiras reportados ao Internal Revenue Service (EUA) para estimar mudanças no ARA e no RRA como função da riqueza dos investidores

Os resultados foram consistentes com uma poderosa função utilidade, para W > 0, o que pode ser escrita como:

$$U(W) = -W^{-1}; \qquad U'(W) = W^{-2} > 0; \quad U''(W) = -2W^{-3} < 0$$

Para essa poderosa função utilidade, as medidas de aversão ao risco são:

$$\boldsymbol{ARA = -\frac{-2W^{-3}}{W^{-2}} = \frac{2}{W}; \frac{d(ARA)}{dW} < 0}$$

$$\boldsymbol{RRA = W.\frac{2}{W} = 2; \frac{d(RRA)}{dW} < 0}$$

A poderosa função utilidade é consistente com os resultados empíricos e exibe todas as propriedades intuitivamente plausíveis:

(i) A utilidade marginal da riqueza é positiva;

(ii) A utilidade marginal da riqueza decresce com o aumento da riqueza;

(iii) A medida da ARA decresce com o aumento da riqueza; e

(iv) RRA é constante.

Comparação da Aversão ao Risco

E se compararmos a medida do prêmio de risco de Markowitz com a medida de prêmio de risco de Arrow-Pratt?

- ⇨ Medida de Arrow-Pratt de aversão ao risco (ARA e RRA) assume que o risco é pequeno e atuarialmente neutro: medidas úteis para distinguir entre os diversos tipos de função utilidade côncavas
- ⇨ Medida de prêmio de risco de Markowitz simplesmente compara as riquezas associadas a E[U(W)] com U[E(W)] e não é limitado pelos pressupostos de Arrow-Pratt: em geral, essa medida é superior para riscos grandes e assimétricos

Vamos utilizar um exemplo para comparar os resultados das duas medidas

Um indivíduo com função utilidade logarítmica e nível de riqueza de \$20.000 está exposto a dois diferentes riscos: (1) 50% de chance de ganhar ou perder \$10; e (2) 80% de chance de perder \$1.000 e 20% de chance de perder \$10.000

Qual o prêmio de risco requerido por este indivíduo que se depara com cada um desses riscos? Note que o primeiro risco é pequeno e atuarialmente neutro; o segundo risco é grande e muito assimétrico.

Comparação da Aversão ao Risco

A medida de Arrow-Pratt

$$\pi = \frac{1}{2}.\sigma_Z^2.\left(-\frac{U"(W)}{U'(W)}\right)$$

A variância do primeiro risco é dada por:

$$\sigma_Z^2 = \sum p_i.(X_i - E(X))^2$$

$$\sigma_Z^2 = \frac{1}{2}(20.010 - 20.000)^2 + \frac{1}{2}(19.990 - 20.000)^2 = 100$$

A relação entre a primeira e a segunda derivada da função de utilidade logarítmica avaliada para o nível de riqueza de \$20.000 é:

$$U'(W) = \frac{1}{W} \text{ e } U''(W) = -\frac{1}{W^2} \Rightarrow \frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{1}{W} = -\frac{1}{20.000}$$

Logo, a medida de prêmio de risco de Arrow-Pratt é:

$$\pi = \frac{1}{2}.100.\left(-\left(-\frac{1}{20.000}\right)\right) = \$0{,}0025$$

A medida de Markowitz

O prêmio de risco de Markowitz requer o cálculo da utilidade esperada do jogo:

$$E[U(W)] = \sum p_i.U(W_i)$$

$$E[U(W)] = \frac{1}{2}U(20.010) + \frac{1}{2}U(19.990)$$

$$E[U(W)] = \frac{1}{2}\ln 20.010 + \frac{1}{2}\ln 19.990 = 9{,}903487428$$

O equivalente certeza da riqueza é aquele que torna o indivíduo indiferente entre o nível corrente de riqueza, dada a loteria, e uma riqueza menor, mas recebida com certeza. Logo, o equivalente certeza é o nível de riqueza associado à utilidade de 9,903487428:

$$W = e^{\ln(W)} = \$19.999{,}9974998$$

O valor esperado da riqueza com certeza é:
E(W) = \$20.000

Logo, o prêmio de risco de Markowitz é:

$$\pi = 20.000 - 19.999{,}9974998 = \$0{,}0025002$$

Comparação da Aversão ao Risco

Exercício:

Repita os cálculos anteriores para o segundo risco do exemplo anterior.

Você verá que os pressupostos de Arrow-Pratt não representam uma boa aproximação para riscos grandes e muito assimétricos

Os resultados irão mostrar que o prêmio de risco de Arrow-Pratt é de $324 no segundo caso, enquanto o prêmio de risco de Markowitz é de $489 (riqueza esperada igual a $17.200 e equivalente certeza igual a $16.711).

Para calcularmos o custo da loteria o invés do prêmio de risco, devemos subtrair o equivalente certeza de $16.711 da riqueza corrente igual a $20.000 ⇨ custo da loteria é de $3.289: o indivíduo pagaria até $3.289 para evitar a loteria

Comparação da Aversão ao Risco

A medida de Arrow-Pratt

$$\pi = \frac{1}{2}.\sigma_Z^2.\left(-\frac{U"(W)}{U'(W)}\right)$$

A variância do segundo risco é dada por:

$$\sigma_Z^2 = \sum p_i.(X_i - E(X))^2$$

$$\sigma_Z^2 = 0{,}8.(19.000 - 17.200)^2 + 0{,}2.(10.000 - 17.200)^2 = 12.960.000$$

A relação entre a primeira e a segunda derivada da função de utilidade logarítmica avaliada para o nível de riqueza de $20.000 é:

$$U'(W) = \frac{1}{W} \text{ e } U''(W) = -\frac{1}{W^2} \Rightarrow \frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{1}{W} = -\frac{1}{20.000}$$

Logo, a medida de prêmio de risco de Arrow-Pratt é:

$$\pi = \frac{1}{2}.12.960.00.\left(-\left(-\frac{1}{20.000}\right)\right) = \$324$$

A medida de Markowitz

O prêmio de risco de Markowitz requer o cálculo da utilidade esperada do jogo:

$$E[U(W)] = \sum p_i.U(W_i)$$

$$E[U(W)] = 0{,}8.U(19.000) + 0{,}2.U(10.000)$$
$$E[U(W)] = 0{,}8.\ln 19.000 + 0{,}2.\ln 10.000 = 9{,}7238235$$

O equivalente certeza da riqueza é aquele que torna o indivíduo indiferente entre o nível corrente de riqueza, dada a loteria, e uma riqueza menor, mas recebida com certeza. Logo, o equivalente certeza é o nível de riqueza associado à utilidade de 9,7238235:

$$W = e^{\ln(W)} = \$16.711$$

O valor esperado da riqueza com certeza é:
E(W) = $17.200

Logo, o prêmio de risco de Markowitz é:

$$\pi = 17.200 - 16.711 = \$489$$

Custo da loteria: 20.000 – 16.711 = $3.289

Dominância Estocástica

Qualquer investidor busca maximizar sua utilidade esperada da riqueza: utilidade esperada é uma boa medida para fazer escolha sob incerteza

Uma carteira (ou portfolio) de risco é dito ser estocasticamente dominante sobre outro se o indivíduo receber mais riqueza desta carteira em todos (e ordenados) estados da natureza ⇨ Dominância Estocástica de Primeira Ordem

Matematicamente, o ativo x, com distribuição cumulativa de probabilidade Fx(W), é estocasticamente dominante sobre outro ativo y, com distribuição cumulativa de probabilidade Gy(W), para um conjunto de funções utilidade não-decrescentes se:

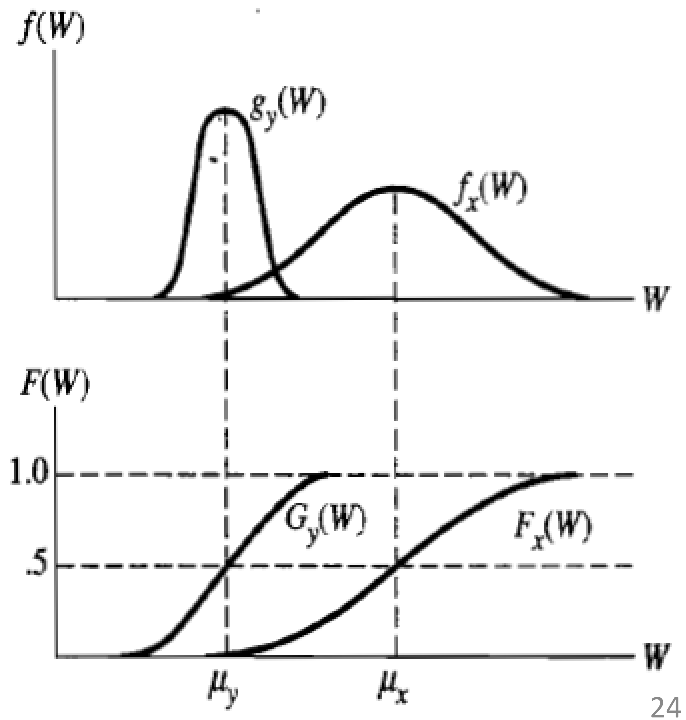
$$\left.\begin{array}{l} F_x(W) \leq G_y(W), \text{ para todo W} \\ F_x(W_i) < G_y(W_i), \text{ para algum } W_i \end{array}\right\}$$

Dominância Estocástica de Primeira Ordem

Se as condições acima forem verdadeiras, dizemos que x domina y

O gráfico ao lado mostra um exemplo de dominância estocástica de primeira ordem, assumindo que a distribuição da riqueza dos dois ativos é uma distribuição normal

x domina y porque a distribuição de y está sempre à esquerda da distribuição de x



Dominância Estocástica

A dominância estocástica de primeira ordem é aplicável a todas as funções utilidade crescentes ⇨ indivíduos com qualquer tipo de postura perante o risco iriam preferir o ativo x ao ativo y

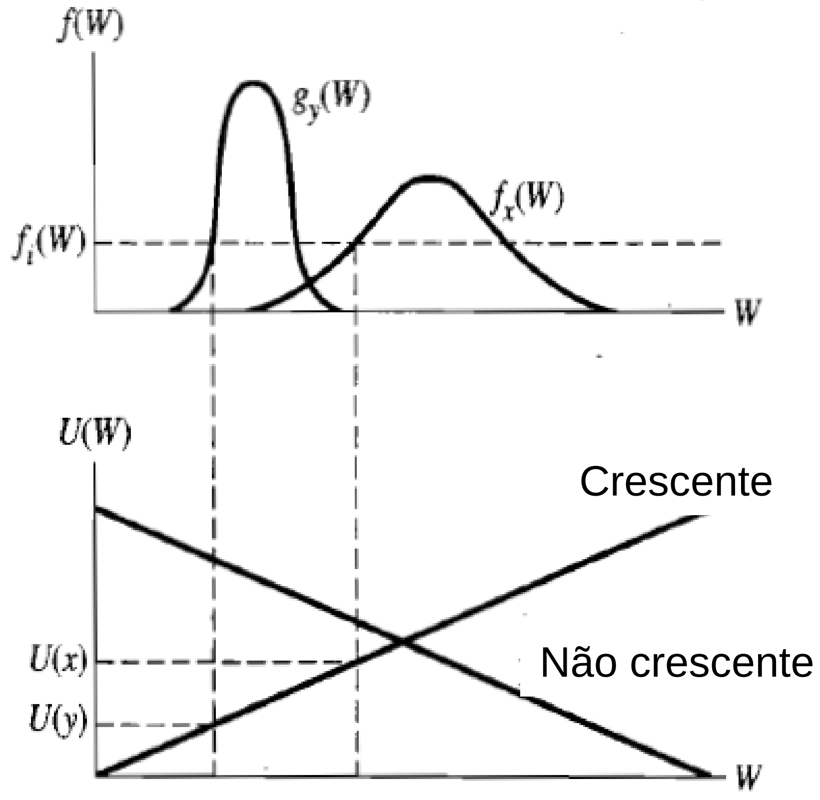
⇨ A dominância estocástica de primeira ordem garante que a utilidade esperada da riqueza oferecida por x será maior do que aquela oferecida por y para todas as funções utilidade crescentes

Considere a definição da utilidade esperada:

$$\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{UW})] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{W}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{W}).\boldsymbol{dW}$$

Em que: U(W) = função utilidade; W = nível de riqueza;
f(w) = frequência de distribuição da riqueza

A utilidade esperada é a soma das utilidades para todos os possíveis níveis de riqueza ponderados pela sua probabilidade



No gráfico ao lado, as funções utilidade são lineares. Para um dado nível de riqueza, fi(W) mostrada no gráfico superior, o aumento da função utilidade associa um maior nível de utilidade ao nível de riqueza oferecido pelo ativo x do que pelo ativo y. Isso é verdade para todas as frequências!

⇨ A utilidade esperada da riqueza do ativo x é maior do que do ativo y para o conjunto de funções utilidade crescentes (utilidade marginal da riqueza crescente)

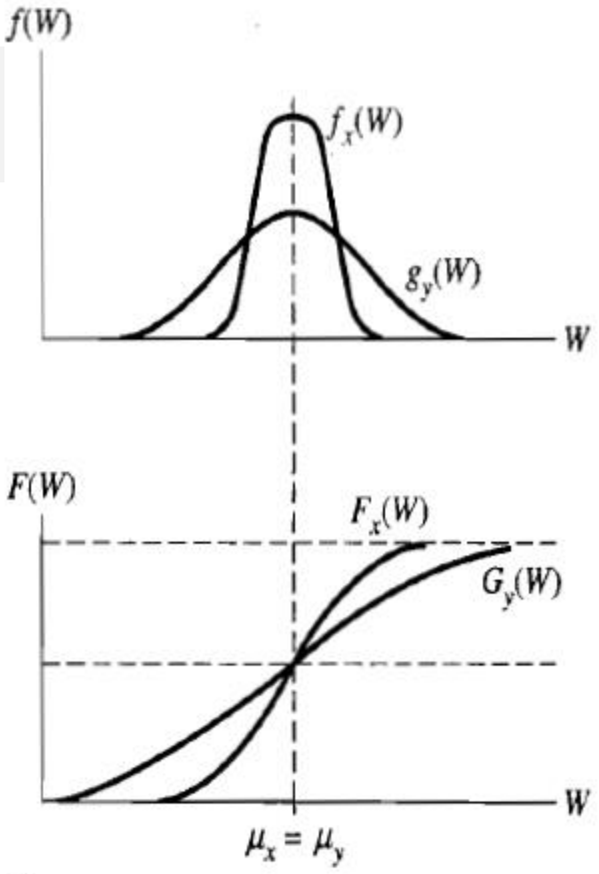
Dominância Estocástica

A **Dominância Estocástica de Segunda Ordem** Assume que as utilidades marginais da riqueza são positivas, mas também que a utilidade total aumenta a taxas decrescentes ⇨ funções utilidade são não-decrescentes e estritamente côncavas (indivíduos são avessos ao risco)

O ativo x é dominante estocasticamente sobre o ativo y para todos os investidores avessos ao risco se:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{W_i}[G_y(W)-F_x(W)].dW \geq 0 \text{ para todo W}\\&G_y(W_i) \neq F_x(W_i) \text{ para algum } W_i\end{aligned}\right\}$$

Dominância Estocástica de Segunda Ordem

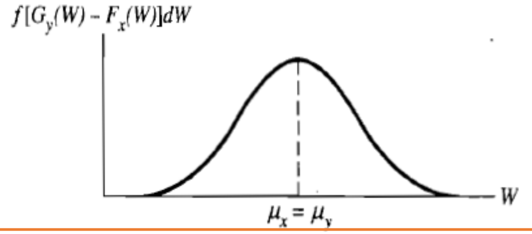


Ou seja: as funções densidade cumulativas podem se cruzar (como no exemplo dos gráficos ao lado)

O ativo x irá dominar o ativo y se o investidor for avesso ao risco, uma vez que o valor esperado da riqueza é o mesmo para os dois ativos, mas y tem mais risco

O critério da dominância estocástica de segunda ordem requer que a diferença das áreas sob as funções densidade cumulativas seja positiva abaixo de qualquer nível de riqueza (Wi) ⇨ até a média, $G_y(W)$ é estritamente maior do que $F_x(W)$; após a média, o contrário é verdadeiro

A soma das diferenças entre das duas funções densidade cumulativas é sempre maior ou igual a zero: x domina y



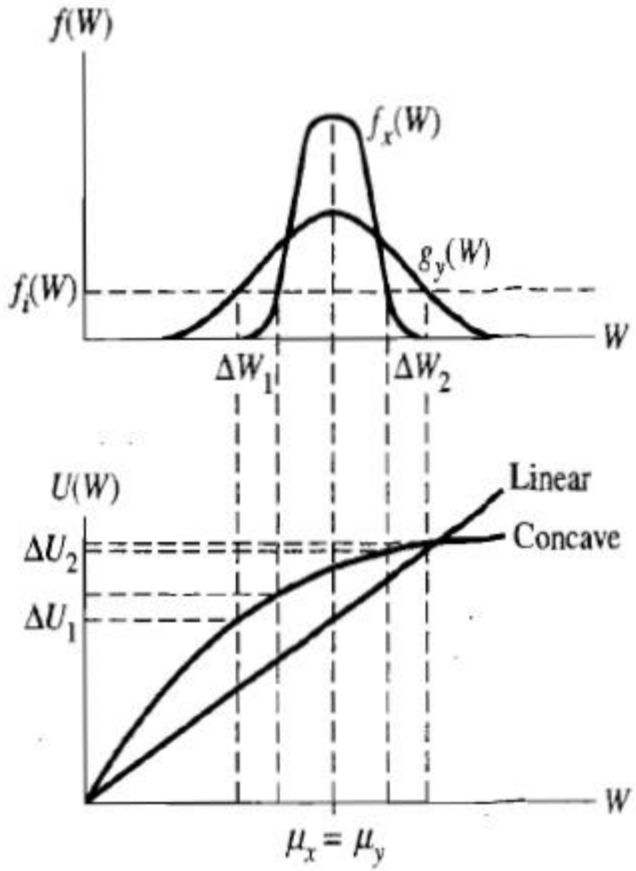
Dominância Estocástica

Maximização da utilidade esperada e dominância estocástica

A função utilidade côncava de um investidor avesso ao risco tem a propriedade de que o aumento na utilidade para mudanças constantes da riqueza diminui conforme a riqueza aumenta ⇨ para uma dada frequência da riqueza, fi(W), a variação da riqueza será a mesma ΔW_1 e ΔW_2

A diferença da utilidade entre x e y abaixo da média é muito maior do que a diferença da utilidade para a mesma mudança da riqueza acima da média

- ⇨ Se tomarmos a utilidade esperada pareando todas essas diferenças de igual probabilidade, a utilidade esperada de x é maior do que a utilidade esperada de y
- ⇨ Se o indivíduo for neutro ao risco, as diferenças da utilidade acima e abaixo da média serão sempre iguais, logo, o investidor é indiferente entre os ativos x e y



A dominância estocástica é muito importante porque está fundamentada na maximização da utilidade esperada e pode ser aplicada a qualquer distribuição de probabilidade

Média e Variância como Critérios de Escolha

A variação da riqueza em um entre o início e o final de um período pode ser observada pelo seu retorno:

$$\widetilde{R_j} = \frac{\widetilde{W_j} - W_0}{W_0}$$

Se, no final do período, a riqueza por em um ***ativo j*** é normalmente distribuída com média $\overline{W}$ e variância σ_W^2, então, o retorno do ***ativo j*** também será normalmente distribuído com:

Média: $E(R_j) = \frac{E(W_j)}{W_0} - 1$ e Variância: $\sigma_R^2 = \frac{\sigma_W^2}{W_0^2}$

Assumindo que o retorno do ativo é normalmente distribuído com média E e variância σ^2, podemos escrever a função utilidade como:

$$\boldsymbol{U = U(R_j; E, \sigma)}$$

A utilidade esperada é, portanto:

$$\boldsymbol{E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(R).f(R; E, \sigma).dR}$$

Queremos expressar a curva de indiferença de um investidor avesso ao risco como função da média e variância da distribuição dos retornos

⇨ A curva de indiferença é o mapeamento de todas as combinações de risco e retorno que levam ao mesmo nível de utilidade esperada

⇨ Se as combinações oferecem utilidade esperada idênticas, o investidor será indiferente entre elas

Média e Variância como Critérios de Escolha

Queremos mostrar que a taxa marginal de substituição entre o retorno e o risco é positiva e que as curvas de indiferença do investidor avesso ao risco são convexas

1) Vamos converter os retornos aleatórios em uma variável com distribuição normal padrão (média zero e variância 1) pela variável a seguir:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{R} - E}{\sigma}$$

Logo, temos que:

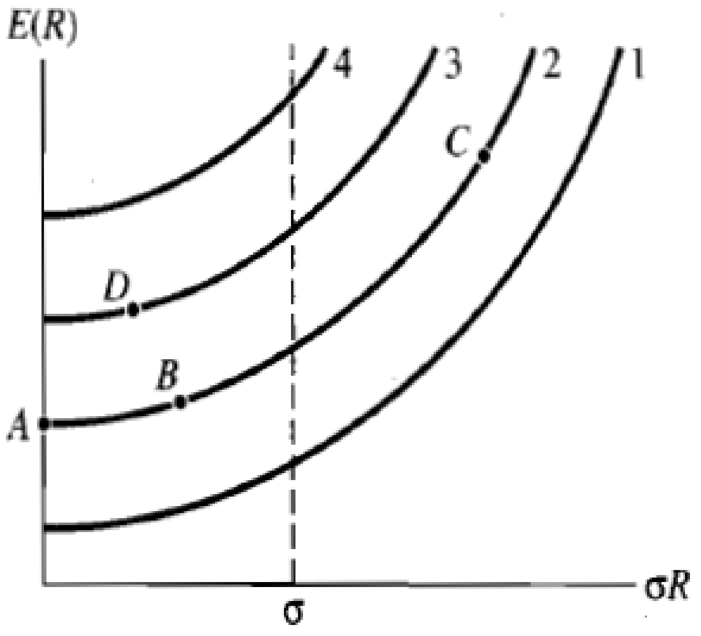
$$\tilde{R} = E + \sigma\tilde{Z}, \frac{dR}{dZ} = \sigma, \; dR = \sigma.dZ$$

Quando: $R = -\infty \rightarrow Z = -\infty$ e quando $R = +\infty \rightarrow Z = +\infty$

2) Utilizando a substituição de variáveis, podemos reescrever a utilidade esperada como:

$$\boldsymbol{E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} U\big(E + \sigma\tilde{Z}\big).f(Z;0,1).dZ}$$

Curvas de Indiferença de um investidor avesso ao risco



Média e Variância como Critérios de Escolha

3) Vamos derivar a utilidade esperada com respeito ao desvio padrão dos retornos:

$$\frac{d\boldsymbol{E(U)}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U'}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)\left(\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{\sigma}} + \tilde{\boldsymbol{Z}}\right).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}).\,d\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$$

Um curva de indiferença é definida como o locus de pontos em que a mudança na utilidade esperada é igual a zero ⇨ a solução da equação acima representa uma curva de indiferença

Separando os termos, temos:

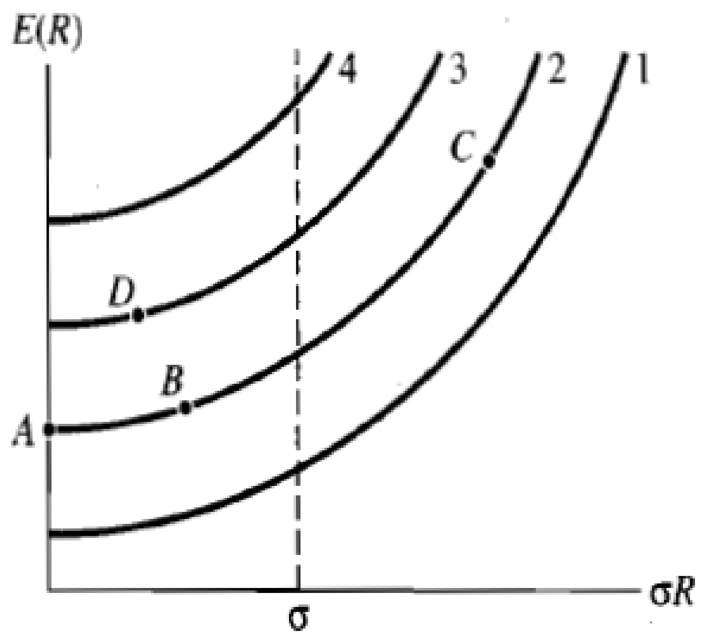
$$\boldsymbol{0} = \frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U'}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{Z}}\right).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}).\,d\boldsymbol{Z} + \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U'}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}).\,d\boldsymbol{Z}$$

Assim, a inclinação da curva de indiferença é:

$$\frac{d\boldsymbol{E}}{d\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U'}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}).\,d\boldsymbol{Z}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U'}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Z};\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}).\,d\boldsymbol{Z}} > 0$$

- ✓ O denominador é positivo por causa do pressuposto de que a utilidade marginal é positiva: pessoas preferem do que menos
- ✓ O numerador é negativo considerando que temos um investidor avesso ao risco com uma função utilidade estritamente côncava

Curvas de Indiferença de um investidor avesso ao risco

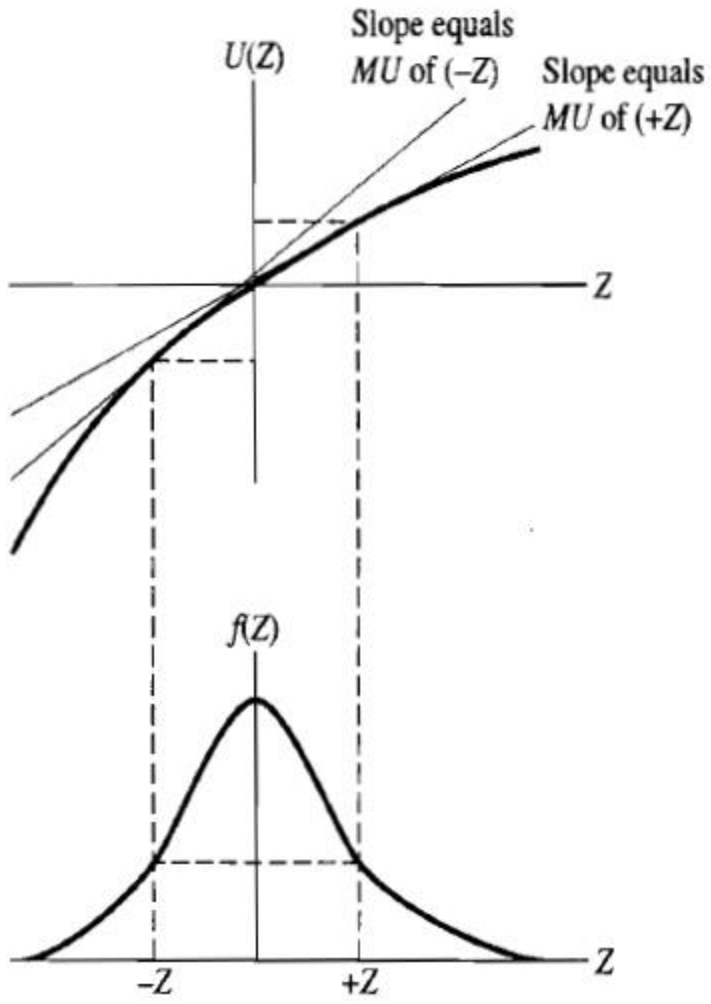


Média e Variância como Critérios de Escolha

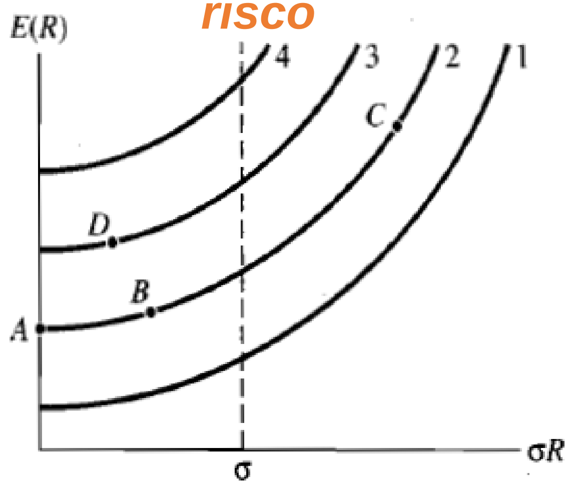
Na figura ao lado é possível ver que a utilidade marginal de todo valor negativo de Z é maior do que a utilidade marginal de um valor positivo de Z igualmente provável

Como isso é verdadeiro para todos os pares de resultados $\pm Z$, a integral do denominador é negativa e a razão toda é sempre positiva

⇨ Logo, a inclinação da curva de indiferença do investidor avesso ao risco (taxa marginal de substituição entre a média e variância) é sempre positiva, exceto quando $\sigma = 0$, em que a inclinação é sempre zero



Curvas de Indiferença de um investidor avesso ao risco



Média e Variância como Critérios de Escolha

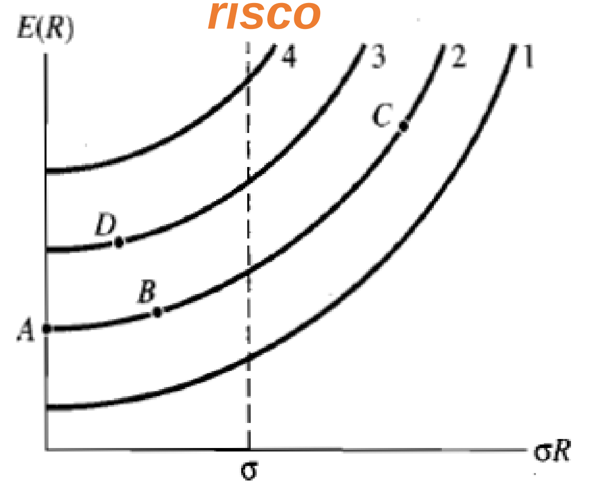
Na figura ao lado é possível ver que a utilidade marginal de todo valor negativo de Z é maior do que a utilidade marginal de um valor positivo de Z igualmente provável

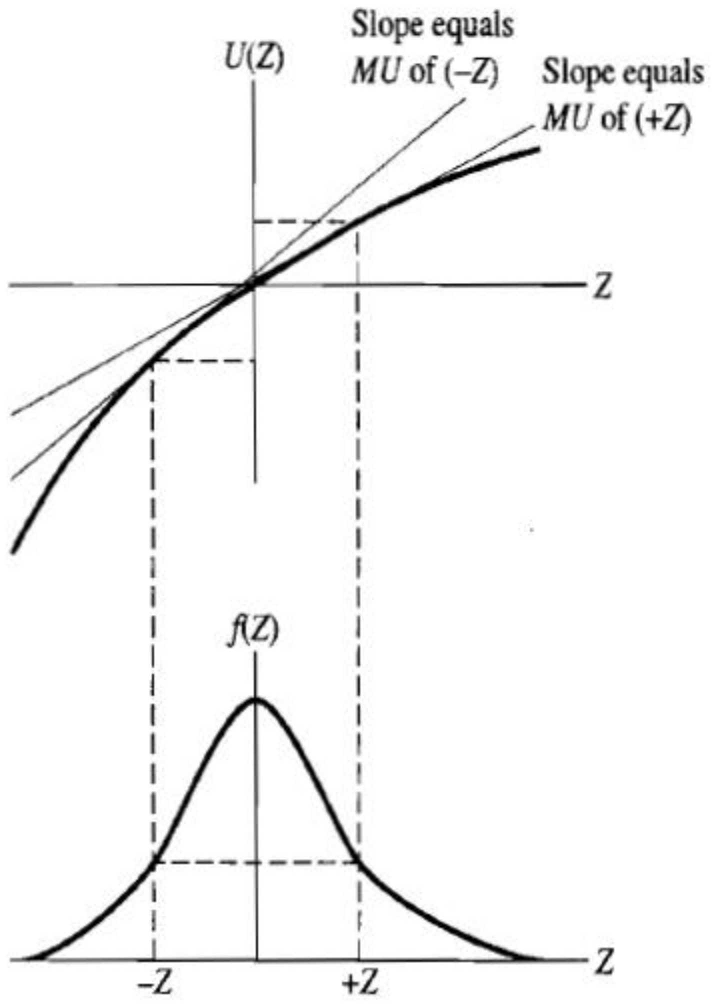
Como isso é verdadeiro para todos os pares de resultados $\pm Z$, a integral do denominador é negativa e a razão toda é sempre positiva

⇨ Logo, a inclinação da curva de indiferença do investidor avesso ao risco (taxa marginal de substituição entre a média e variância) é sempre positiva, exceto quando $\sigma = 0$, em que a inclinação é sempre zero

Pontos A, B e C estão sobre a mesma curva de indiferença: igualmente preferíveis
Curvas de indiferença mais altas aumentam a utilidade esperada: preferimos o ponto D ao ponto C ⇨ ponto D tem risco muito menor, o que compensa o menor retorno
Ac curvas de indiferença não são necessariamente paralelas, mas elas não podem se cruzar ou se tocar

Curvas de Indiferença de um investidor avesso ao risco





Um Paradoxo da Média Variância

A caracterização do risco e retorno pela média e variância das distribuições pode não ser sempre correta: é correto apenas quando os retornos possuem distribuição normal

Considere o exemplo: duas empresas com mesmo ativo total e mesma distribuição da receita operacional bruta diferem apenas em relação a seu nível de alavancagem:

Firma A		Firma B	
Ativos	**Passivos**	**Ativos**	**Passivos**
	Dívida: $0		Dívida: $10.000
	PL: $20.000		PL: $10.000
$20.000	**$20.000**	**$20.000**	**$20.000**

Um Paradoxo da Média Variância

Os números para os diferentes estados da natureza são:

	Estado Econômico da Natureza				
	Péssimo	Ruim	Neutro	Bom	Excelente
Receita Operacional Líquida	$ 1,200.00	$ 1,600.00	$ 2,000.00	$ 2,400.00	$ 2,800.00
Probabilidade	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Firma A					
Despesas Financeiras	$ -	$ -	$ -	$ -	$ -
Lucro Antes do Imposto	$ 1,200.00	$ 1,600.00	$ 2,000.00	$ 2,400.00	$ 2,800.00
Imposto (50%)	$ -600.00	$ -800.00	$ -1,000.00	$ -1,200.00	$ -1,400.00
Receita Líquida	$ 600.00	$ 800.00	$ 1,000.00	$ 1,200.00	$ 1,400.00
Lucro por Ação (200 ações)	$ 3.00	$ 4.00	$ 5.00	$ 6.00	$ 7.00
Firma B					
Despesas Financeiras	$ -600.00	$ -600.00	$ -600.00	$ -600.00	$ -600.00
Lucro Antes do Imposto	$ 600.00	$ 1,000.00	$ 1,400.00	$ 1,800.00	$ 2,200.00
Imposto (50%)	$ -300.00	$ -500.00	$ -700.00	$ -900.00	$ -1,100.00
Receita Líquida	$ 300.00	$ 500.00	$ 700.00	$ 900.00	$ 1,100.00
Lucro por Ação (100 ações)	$ 3.00	$ 5.00	$ 7.00	$ 9.00	$ 11.00

Um Paradoxo da Média Variância

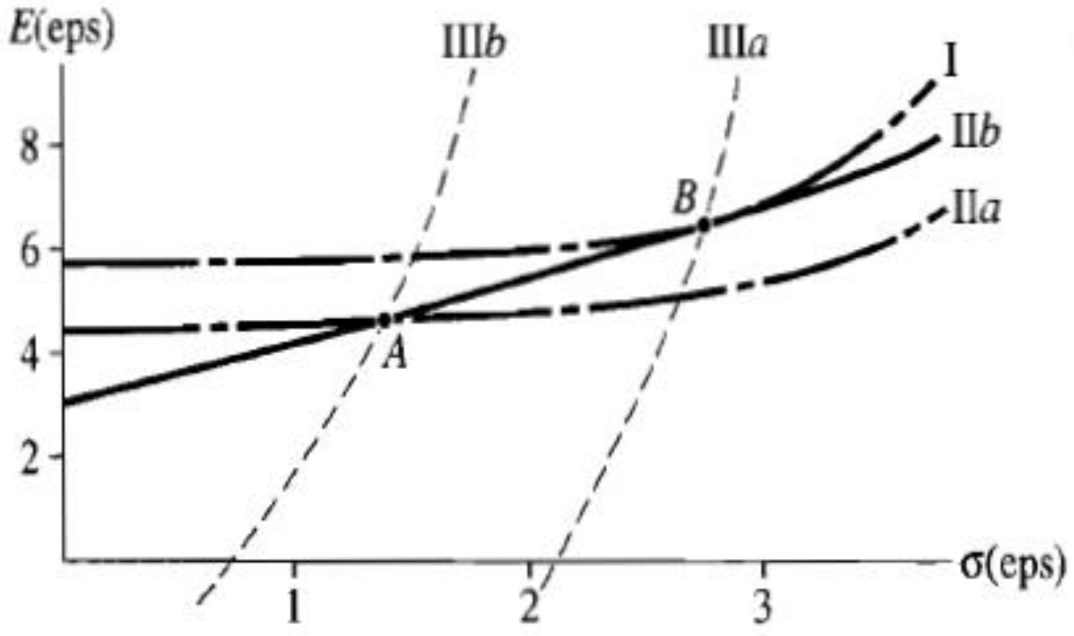
- A média e o DP dos ganhos por ação da empresa A são \$5 e \$1,41, respectivamente
- A média e o DP dos ganhos por ação da empresa B são \$7 e \$2,82, respectivamente

A figura ao lado mostra as estatísticas das duas empresas

- ✓ Indivíduo I seria indiferente entre as combinações de risco e retorno das duas empresas
- ✓ Indivíduo II (menos avesso ao risco) prefere a alternativa B, que tem maior retorno
- ✓ Indivíduo III prefere a alternativa A, que tem menor risco

Paradoxo: ganhos por ação da firma B são iguais ou maiores do que os ganhos por ação da firma A em todos os estados da natureza

Critério da média-variância leva a resultados errados: nenhum investidor com utilidade marginal positiva deve preferir a empresa A



Um Paradoxo da Média Variância

A questão é que a distribuição dos resultados não é normal: distribuição retangular com iguais probabilidades em todos os estados da natureza

Podemos usar a dominância estocástica de segunda ordem para qualquer distribuição, como pode ser visto na tabela e no gráfico a seguir

Como a área acumulada sob a distribuição dos ganhos por ação oferecidos pela firma B é sempre menor ou igual à ára acumulada pela firma A, podemos dizer que B claramente domina A

Lucro por Ação (LPA)	Prob (B)	Prob (A)	F(B)	G(A)	F - G	Prob. Acum. (F - G)
$ 3.00	0.20	0.20	0.20	0.20	0.00	0.00
$ 4.00	0.00	0.20	0.20	0.40	-0.20	-0.20
$ 5.00	0.20	0.20	0.40	0.60	-0.20	-0.40
$ 6.00	0.00	0.20	0.40	0.80	-0.40	-0.80
$ 7.00	0.20	0.20	0.60	1.00	-0.40	-1.20
$ 8.00	0.00	0.00	0.60	1.00	-0.40	-1.60
$ 9.00	0.20	0.00	0.80	1.00	-0.20	-1.80
$ 10.00	0.00	0.00	0.80	1.00	-0.20	-2.00
$ 11.00	0.20	0.00	1.00	1.00	0.00	-2.00
	1.00	**1.00**