SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-10 – Autovalores e autovetores

Prof. Miguel Frasson

Outubro de 2020

Resumo: autovalores e autovetores

- A matriz $n \times n$
- Se $v \neq 0$ é vetor coluna tal que $Av = \lambda v$, com λ número (real ou complexo):
  - λ é autovalor
  - v é autovetor (associado a λ)
- Equação característica: $\det(A - \lambda I) = 0$
  - Raízes são os autovalores
- Buscando autovetores associados a λ: resolver

$$(A - \lambda I)v = 0, \quad v \neq 0$$

Autovalores de matrizes triangulares

- Se A é matriz triangular, seus autovalores são os elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \implies A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & d-\lambda & e \\ 0 & 0 & f-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda)(f-\lambda) = 0$$

$$\implies a, d, f \text{ autovalores.}$$

Multiplicidade algébrica e geométrica

Multiplicidade algébrica é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico.

Multiplicidade geométrica é a quantidade de autovetores LI associados a λ

- $1 \leqslant$ Multiplicidade geométrica $\leqslant$ Multiplicidade algébrica

Exemplo

As matrizes A, B e C têm 2 como autovalor de multiplicidade algébrica 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A - 2I = 0 \implies e_1, e_2, e_3$ são 3 autovetores LI.
- $B - 2I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \implies e_1, e_3$ são 2 autovetores LI.
- $C - 2I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \implies e_1$ é o único autovetor LI.

Autovalores e autovetores podem ser complexos

- Você sabia que multiplicar números complexos é multiplicar módulos e somar ângulos?

$$
\begin{gathered}
z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad w = s(\cos\gamma + i \operatorname{sen}\gamma) \implies \\
zw = rs(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\gamma + i \operatorname{sen}\gamma) \\
= rs[(\cos\theta\cos\gamma - i \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\gamma) + i(\cos\theta \operatorname{sen}\gamma + i \operatorname{sen}\theta\cos\gamma) \\
= rs[\cos(\theta+\gamma) + \operatorname{sen}(\theta+\gamma)]
\end{gathered}
$$

- Rotações podem ser interpretadas como multiplicação por complexos

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \implies$$
$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \implies \lambda = \pm i$$

- Para $\lambda = i$

$$(A - iI)v = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies a - ib = 0$$
$$\implies a = ib \implies v = \begin{pmatrix} ib \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Para $\bar{\lambda} = -i$, $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
- Se A é matriz real, $\overline{\lambda v} = \overline{Av} = \bar{A}\bar{v} = A\bar{v}$ portanto $\bar{v}$ é autovetor de $\bar{\lambda}$.