2020-2, "FISMAT-AV", AULA 33

OBJETIVOS: DISCUTIR OS CASOS (INVARIANTES POR TRANSLAÇÃO) EM QUE A FUNÇÃO DE GREEN ATUA COMO UM NÚCLEO DE <u>CONVOLUÇÃO</u>

4.3 SISTEMAS INVARIANTES "NO TEMPO" (OU "POR TRANSLAÇÕES")

MUITOS SISTEMAS FÍSICOS PODEM SER DESCRITOS MATEMATICAMENTE COMO OPERADORES <u>LINEARES</u> QUE TRANSFORMAM UM <u>ESTÍMULO</u> EM UMA <u>RESPOSTA</u>.

ESTÍMULO $\longrightarrow$ RESPOSTA

ENTRADA/ INPUT $\longrightarrow$ SAÍDA / OUTPUT

FORÇAMENTO $\longrightarrow$ SOLUÇÃO FORÇADA

CARGAS E CORRENTES $\longrightarrow$ CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS

FONTES DE CALOR $\longrightarrow$ TEMPERATURA

FORÇAS $\longrightarrow$ POSIÇÃO E VELOCIDADE

POR EXEMPLO, VIMOS NA AULA ANTERIOR QUE A UM PVI COM EDO

$$L[x_p(t)] = f(t)$$

CORRESPONDE UMA SOLUÇÃO

$$x_p(t) = L^{-1}[f(t)] = \int_0^t G(t-t')f(t')dt' .$$

L^{-1} AGE <u>LINEARMENTE</u> SOBRE f

ALGUNS DESSES SISTEMAS LINEARES, QUE SERÃO DESCRITOS PELA EQUAÇÃO

RESPOSTA ESTÍMULO

$$\boxed{R = \Psi(E)} ,$$

SÃO INVARIANTES PELA TRANSLAÇÃO DE UMA VARIÁVEL INDEPENDENTE (ESPACIAL OU TEMPORAL, TIPICAMENTE). POR EXEMPLO DADO UM IMPULSO NO INSTANTE t, A RESPOSTA EM $t+\tau$ SÓ DEPENDERIA DE τ.

FORMALMENTE, NESSA CONDIÇÃO, O OPERADOR Ψ COMUTA COM UM OPERADOR DE TRANSLAÇÃO DE SINAIS:

$$S(t) \xrightarrow{g_\tau} S(t+\tau)$$

$$\Psi \circ g_\tau = g_\tau \circ \Psi \quad , \quad \forall \tau$$

$$E(t) \xrightarrow{g_\tau} E(t+\tau) \xrightarrow{\Psi} \Psi[E(t+\tau)]$$

$$E(t) \xrightarrow{\Psi} R(t) \xrightarrow{g_\tau} R(t+\tau) \quad =?$$

NOTE QUE UMA NOTAÇÃO INGÊNUA SUGERIRIA QUE ISSO SEMPRE SERIA VÁLIDO:

$$R(t) = \Psi(E(t)) \overset{?}{\Longrightarrow} R(t+\tau) = \Psi(E(t+\tau))$$

A SUTILEZA É QUE Ψ DEPENDE DE t, DE ALGUMA FORMA.

□ EXEMPLO: DEFINEM-SE $\Psi = d/dt$ E $\Omega = t\, d/dt$.

$$E(t) \xrightarrow{g_\tau} E(t+\tau) \xrightarrow{\Psi} E'(t+\tau) \quad ✓$$

$$E(t) \xrightarrow{\Psi} E'(t) \xrightarrow{g_\tau} E'(t+\tau)$$

$$E(t) \xrightarrow{g_\tau} E(t+\tau) \xrightarrow{\Omega} t\,E'(t+\tau)$$

$$E(t) \xrightarrow{\Omega} t.E'(t) \xrightarrow{g_\tau} (t+\tau).E'(t+\tau)$$

NÃO QUERO SUGERIR QUE HAVERÁ INVARIÂNCIA POR TRANSLAÇÃO EM QUALQUER PROBLEMA COM OPERADORES DIFERENCIAIS DE COEFICIENTES CONSTANTES. AS CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO FAZEM PARTE DA CARACTERIZAÇÃO DE UM OPERADOR DIFERENCIAL. PORÉM, TIPICAMENTE, A INVARIÂNCIA SE MANIFESTA EM PVIs E EM PROBLEMAS COM CONDIÇÕES DE CONTORNO <u>LIVRES</u>.

PROPOSIÇÃO: QUALQUER FUNÇÃO EXPONENCIAL $e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) QUE PERTENÇA AO DOMÍNIO DE UM OPERADOR φ LINEAR, CONTÍNUO E INVARIANTE POR TRANSLAÇÕES É UMA <u>AUTOFUNÇÃO</u> DE φ.

□ DEMONSTRAÇÃO:

POR HIPÓTESE, PARA QUALQUER τ,

$$R(t+\tau) = \psi[E(t+\tau)].$$

SE $E(t) = e^{\alpha t}$, $R(t) = \psi(e^{\alpha t})$, (1)

E $R(t+\tau) = \psi[e^{\alpha(t+\tau)}] = e^{\alpha\tau}.\psi(e^{\alpha t})$. (2)

COM $t=0$ EM (2), $R(\tau) = e^{\alpha\tau}.R(0)$. (3)

VER (1)

ORA, COM $t=\tau$ EM (1), $R(\tau) = \psi(e^{\alpha\tau})$. (4)

COMO τ É UM PARÂMETRO ARBITRÁRIO,

$$\psi(e^{\alpha\tau}) = \underset{R(0)}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{CTE}}}\,.\,e^{\alpha\tau}.$$

Q.E.D. □

EM PARTICULAR, VAMOS ADMITIR QUE O DOMÍNIO DE ψ INCLUA TODAS AS EXPONENCIAIS IMAGINÁRIAS $e^{i\omega t}$ (t É A VARIÁVEL INDEPENDENTE, ω É UMA CONSTANTE/PARÂMETRO), CADA UMA COM AUTOVALOR $\tilde{G}(\omega)$: $\boxed{\psi(e^{i\omega t}) = \tilde{G}(\omega)e^{i\omega t}}$.

É CLARO QUE O AUTOVALOR DEPENDE DA CONSTANTE / PARÂMETRO ω, MAS ESCREVÊ-LO COMO $\tilde{G}(\omega)$ JÁ É SUGESTIVO DO CAMINHO QUE SEGUIREMOS!

DIGAMOS QUE O ESTÍMULO $E(t)$ SEJA EXPRESSO EM TERMOS DA SUA TRANSFORMADA DE FOURIER:

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \tilde{E}(\omega) \, d\omega .$$

ENTÃO, SOB HIPÓTESES DE CONTINUIDADE BEM AMENAS,

$$\begin{aligned} R(t) = \Psi[E(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(e^{-i\omega t}) \tilde{E}(\omega) \, d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} [\tilde{G}(\omega) \tilde{E}(\omega)] \, d\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{G}(\omega)\tilde{E}(\omega)] \\ &= (G * E)(t) \end{aligned}$$

PELO TEOREMA DA CONVOLUÇÃO!

EQUIVALENTEMENTE, ESCREVEMOS

$$\boxed{\tilde{R}(\omega) = \tilde{G}(\omega) . \tilde{E}(\omega)}$$

FORMA POLAR

FUNÇÃO TRANSFERÊNCIA

$\underline{A(\omega)} . e^{i . \underline{\theta(\omega)}}$

MODULAÇÃO DE FASE

REAL

GANHO, AMPLITUDE

OU, SIMPLESMENTE,

$$\boxed{R = G * E}.$$

POR FIM, É MUITO CONVENIENTE INTERPRETAR ESTA CONVOLUÇÃO NO SENTIDO DE DISTRIBUIÇÕES (VER AULA ANTERIOR), PARA INCLUIRMOS NA ANÁLISE A DELTA DE DIRAC, E É NECESSÁRIO LAMENTARMOS A CONVENÇÃO DE FOURIER QUE ADOTAMOS, NESTE ESPECÍFICO CONTEXTO. PARA ESTE CURSO, $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1/\sqrt{2\pi}$ MAS AGORA O IDEAL SERIA $\tilde{\delta}(\omega) = 1$,

POIS ASSIM δ SERIA A IDENTIDADE DA CONVOLUÇÃO:

$$R = G * E$$
$$\downarrow$$
$$G = G * \delta$$

PARA NÓS, $G = G * (\sqrt{2\pi}\,\delta)$.

NOTE TAMBÉM QUE $R = \Psi(E)$ "MATERIALIZOU-SE" COMO $R = G * E$ E É UMA ABSTRAÇÃO DE $x_p = L^{-1} f$. ANALOGAMENTE, $L x_p = f$ SERIA "ABSTRAÍDA" COMO $\Phi(R) = E$, QUE, POR SUA VEZ, TORNA-SE

$$\boxed{D * R = E},$$

ONDE D É UMA DISTRIBUIÇÃO QUE É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE DERIVADAS DA DELTA DE DIRAC. VEMOS QUE

$$R = G * E = G * (D * R) = (G * D) * R,$$

DE MODO QUE G E D SÃO MUTUAMENTE INVERSOS COMO DISTRIBUIÇÕES. SEU PRODUTO É $\sqrt{2\pi}\,\delta$ (O MAIS ELEGANTE SERIA δ).