UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB0562
CÁLCULO NUMÉRICO

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

ZEB0562 – TÓPICO 10: PARTE 4/5

PVC – EDO ORDEM 2: MDF
EXEMPLO DE APLICAÇÃO

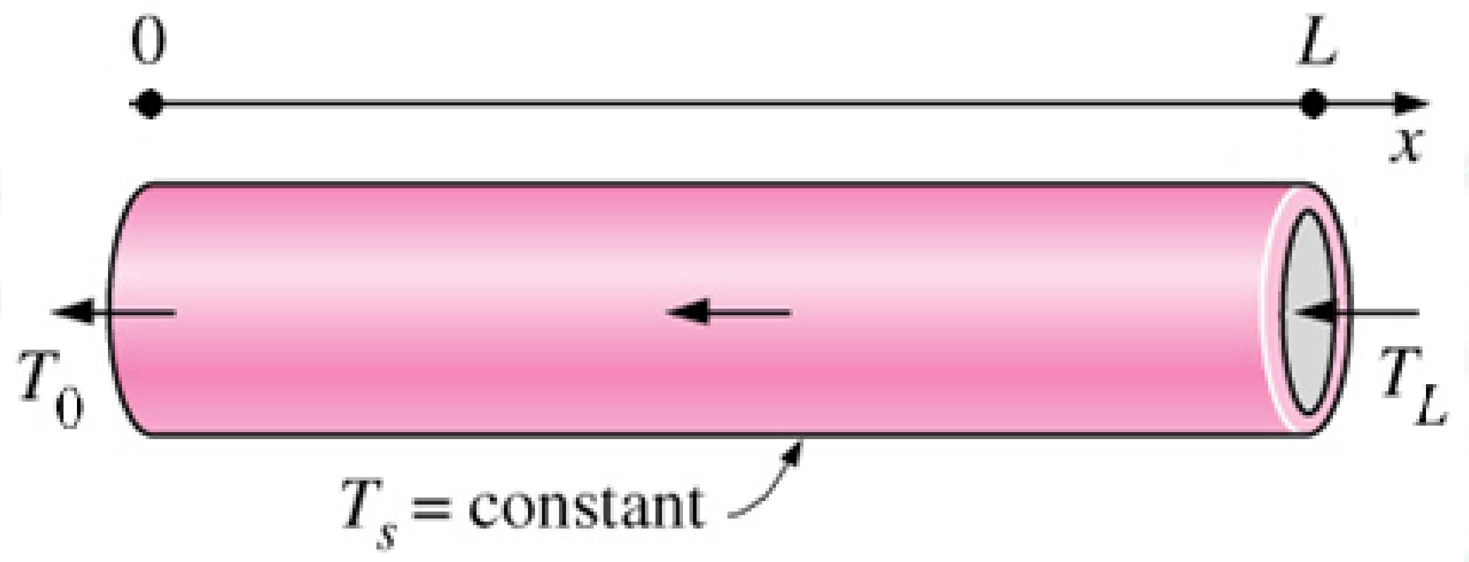
- PVC – MODELO: VARIÁVEIS PRIMITIVAS
- PVC – MODELO: VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS
- SOLUÇÃO: MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS
- IMPLEMENTAÇÃO VIAS PLANILHAS MS EXCEL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Modelo em variáveis primitivas

- Aquecimento fluido em tubo longo: regime permanente

(Adaptado de "Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química" (PINTO & LAGE, 2001))



Balanço de energia $\rightarrow$ condução + convecção + aquecimento :

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \frac{2 h_c}{\rho c R}\left(T_s - T\right) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \rightarrow T = T_0 \approx T_s \\ x = L \rightarrow T = T_L \end{cases}$$

Modelo em variáveis adimensionais

- Aquecimento fluido em tubo longo: regime permanente
  - Adimensionalização $\rightarrow$ introdução de variáveis adimensionais

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+v\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+\frac{2h_c}{\rho cR}\left(T_s-T\right)=0 \qquad \begin{cases} x=0\rightarrow T=T_0\approx T_s \\ x=L\rightarrow T=T_L \end{cases}$$

$X = x/R$ $\theta = (T - T_s)/(T_L - T_s)$ $\lambda = L/R$ Pe $= vR/\alpha$ Nu $= h_cR/k$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}X^2}+\mathrm{Pe}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}X}-2\mathrm{Nu}\,\theta=0 \qquad \begin{cases} X=0 \rightarrow \theta=\theta_0=0 \\ X=\lambda \rightarrow \theta=\theta_L=1 \end{cases}$$

Solução analítica $\longrightarrow$

$$\theta(X)=\frac{e^{\xi_1X}-e^{\xi_2X}}{e^{\xi_1\lambda}-e^{\xi_2\lambda}} \qquad \begin{cases} \xi_1=-\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Pe}-\sqrt{\mathrm{Pe}^2+8\mathrm{Nu}}\right) \\ \xi_2=-\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Pe}+\sqrt{\mathrm{Pe}^2+8\mathrm{Nu}}\right) \end{cases}$$

Formulação: variáveis adimensionais

- Discretização da EDO adimensional governante: MDF

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} + \mathrm{Pe}\frac{d\theta}{dX} - 2\mathrm{Nu}\,\theta = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\theta_{m+1} - 2\theta_m + \theta_{m-1}}{(\Delta X)^2} + \mathrm{Pe}\frac{\theta_{m+1} - \theta_{m-1}}{2\Delta X} - 2\mathrm{Nu}\theta_m = 0$$

Pontos internos $\longrightarrow$ $$\theta_m = \frac{(2 + \mathrm{Pe}\,\Delta X)\theta_{m+1} + (2 - \mathrm{Pe}\,\Delta X)\theta_{m-1}}{4[1 + \mathrm{Nu}\,(\Delta X)^2]}$$

Pontos nas fronteiras: $\theta_0 = 0 \quad ; \quad \theta_M = 1$