Interpolação

Interpolação Polinomial - Forma de Lagrange

Nelson Kuhl

IME/USP

10 de novembro de 2020

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n + 1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n+1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;
2. dada a tabela

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$

   onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, sabemos que existe um **único** polinômio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, chamado de polinômio interpolador da tabela;

Revisão e comentários

1. Vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de dimensão $n+1$ gerado pelos polinômios reais de grau menor ou igual a n;
2. dada a tabela
$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}, \tag{1}$$
onde $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, sabemos que existe um **único** polinômio $p_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $p_n(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$, chamado de polinômio interpolador da tabela;
3. escolhendo-se bases diferentes para $\mathcal{P}_n$, obteremos representações diferentes para este único polinômio interpolador.

Os polinômios L_k

Definição 1

Considere os pontos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ da tabela (1). Para cada $k = 0, 1, \ldots$ n, defina

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2}$$

Os polinômios L_k

Definição 1

Considere os pontos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ da tabela (1). Para cada $k = 0, 1, \ldots \mathrm{n}$, defina

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2}$$

Propriedades:

- L_k é um polinômio de grau exatamente n, $0 \leq k \leq n$; (3)
- $L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n.$ (4)

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

A forma de Lagrange

Teorema 1

O polinômio interpolador p_n da tabela (1) pode ser representado como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x). \tag{5}$$

Esta representação é chamada de forma de Lagrange para o polinômio interpolador.

Demonstração Defina a função $q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$. Da propriedade (3), segue que esta função é um polinômio de grau menor ou igual a n. E da propriedade (4) obtemos $q(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq n$. Como o polinômio interpolador é único, segue que $q = p_n$.

$\square$

Observação: Os polinômios $\{L_k\}_{k=0}^{n}$ formam uma base para $\mathcal{P}_n$.

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$:

Exemplo

Retornando ao exemplo da aula anterior

x	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{2}$	1	2	4

com $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 4$:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{(x+1)x(x-2)}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{6}$$

Exemplo

O polinômio interpolador na forma de Lagrange é então dado por

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \frac{1}{2} \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 2 \cdot L_2(x) + 4 \cdot L_3(x) \\
&= -\frac{x(x-1)(x-2)}{12} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \\
&\quad (x+1)x(x-2) + \frac{2}{3}(x+1)x(x-1).
\end{aligned}
$$

Exercíco Agrupe as potências de x e verifique que obtemos exatamente a expressão da aula anterior para a representação do polinômio interpolador na base canônica $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$.