

Exemplo 27-3 Calculando a quantidade de carga móvel

Na bobina descrita no Exemplo 27-2*, a corrente é 4,00 A. Considerando que a velocidade de deriva $\vec{v}_d = 1,40 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, determine a carga móvel (elétrons livres) em Coulombs no fio.

A quantidade de carga em movimento é dada por $Q = I\Delta t$ onde Δt é o tempo para um portador de carga percorrer o comprimento do fio.

A velocidade de deriva é $\vec{v}_d = \frac{L}{\Delta t}$ onde L é o comprimento do fio.

Então $L = N2\pi R = (12)2\pi(0,0500 \text{ m}) = 3,77 \text{ m}$

$$\Delta t = \frac{L}{v_d} = \frac{3,77 \text{ m}}{1,40 \times 10^{-4} \text{ m/s}} = 2,69 \times 10^4 \text{ s}$$

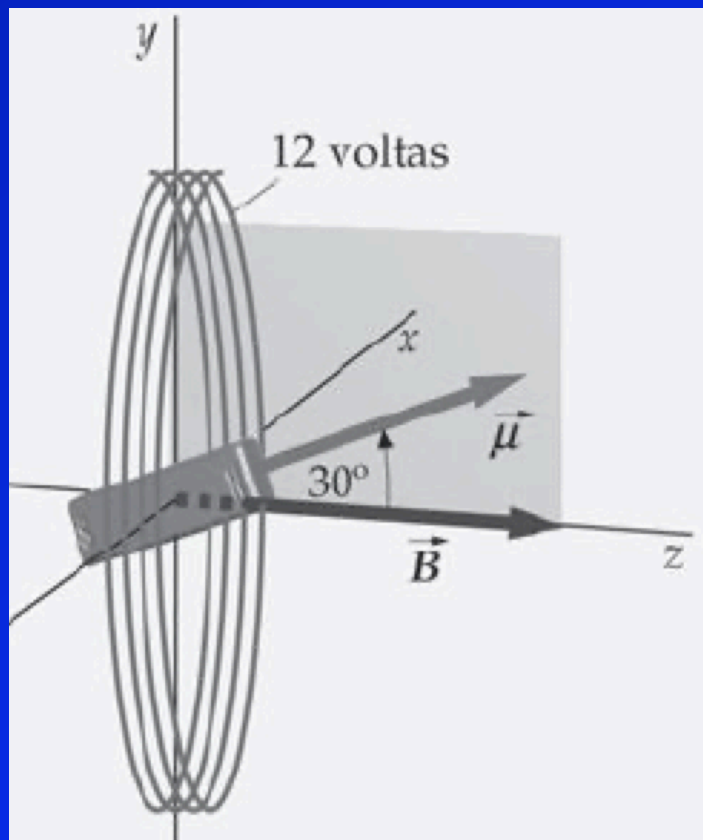
$$Q = I \Delta t = (4,00 \text{ A})(2,69 \times 10^4 \text{ s}) \\ = \boxed{1,08 \times 10^5 \text{ C}}$$

**Bobina circular de raio 5,00 cm e contendo 12 voltas.*

Exemplo 27-4 Torque em um ímã em barra

Um pequeno ímã em barra com módulo do momento magnético de $0,0300 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ é colocado no centro da bobina do Exemplo 27-2* de forma que seu momento magnético está no plano $x = 0$ e faz um ângulo de 30° com a direção $+z$, como mostra a figura.

Desprezando qualquer variação de \vec{B} ao longo da região ocupada pelo ímã, determine o torque exercido sobre ele.



Sabemos que $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

assim,

$$\tau = \mu B \sin \theta$$

$$\tau = (0,0300 \text{ A}\cdot\text{m}^2)(6,03 \times 10^{-4} \text{ T}) \sin 30^\circ$$

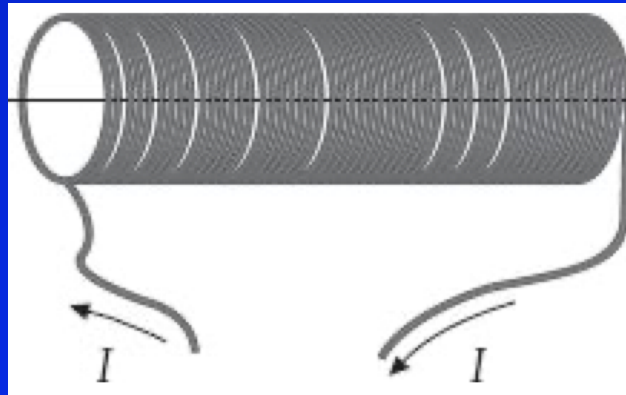
$$\therefore \tau = 9,05 \times 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\vec{\tau} = 9,05 \times 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m} \hat{i}$$

$$*\vec{B} = 6,03 \times 10^{-4} \text{ T}$$

\vec{B} devido à corrente em um solenoide

Um solenoide é um fio condutor enrolado em uma hélice com as voltas bem próximas entre si, como mostra a figura.



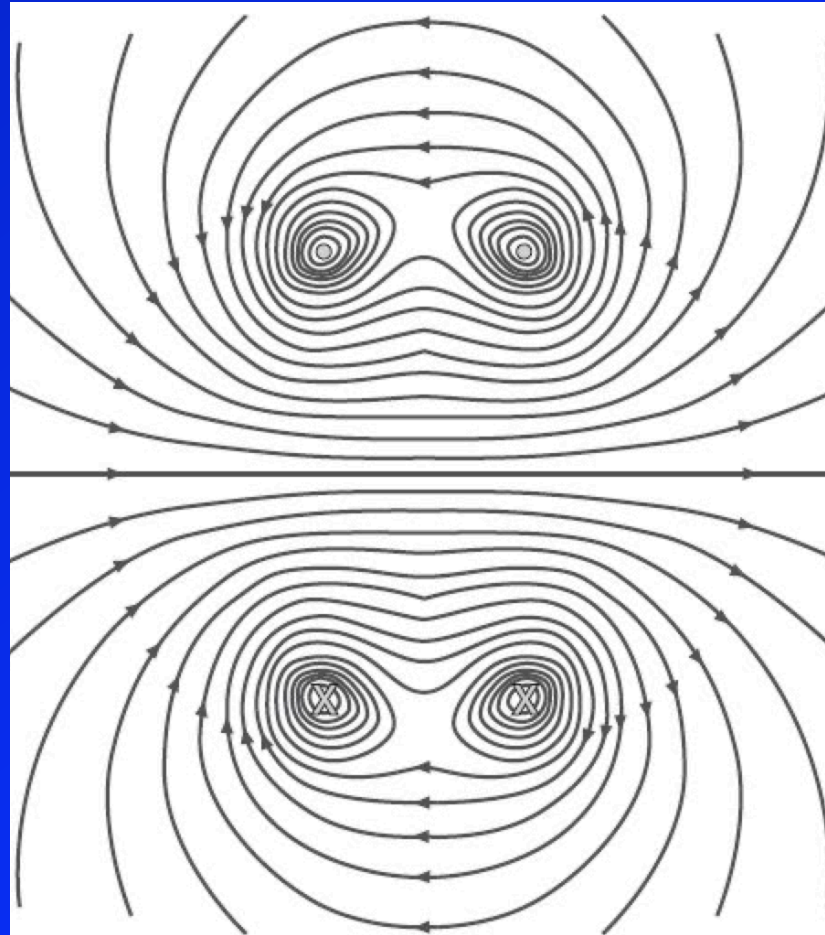
Um solenoide é usado para produzir um campo magnético intenso e uniforme em sua região interna.

O campo magnético de um solenoide é essencialmente o de um conjunto de N anéis de corrente, idênticos, colocados lado a lado.

A figura mostra as linhas de campo magnético de dois anéis coaxiais idênticos conduzindo a mesma corrente.

Na região entre os anéis, próxima ao eixo, os campos magnéticos dos anéis se superpõem, e o campo resultante é intenso e uniforme.

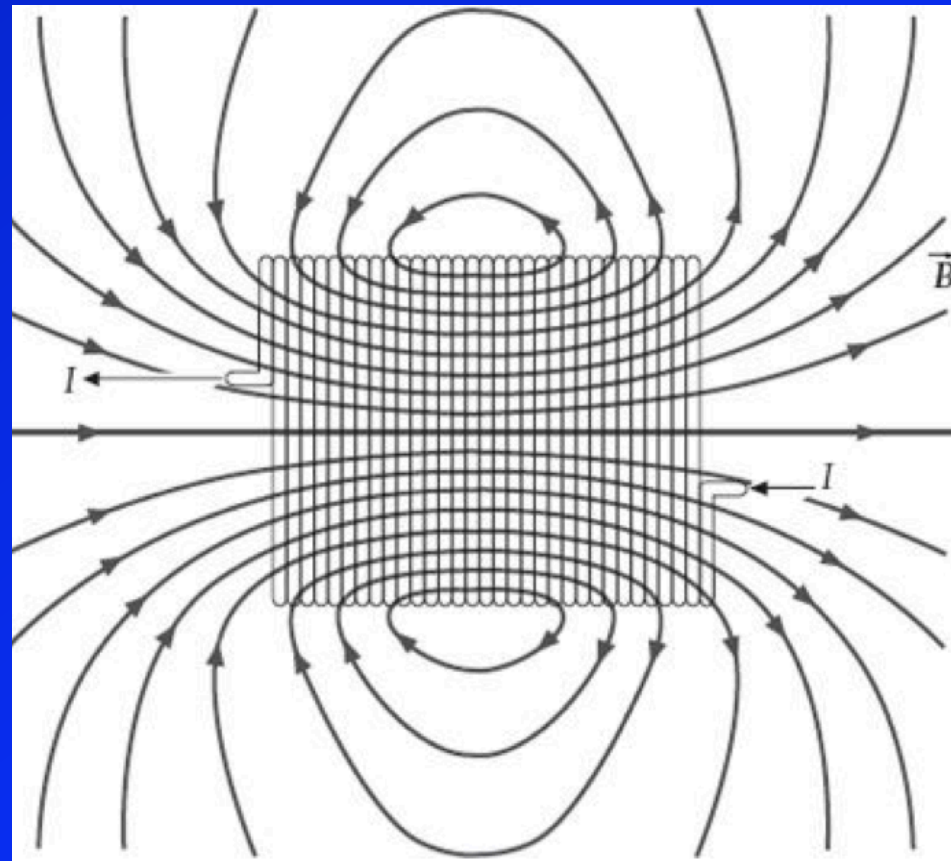
A região onde o campo é uniforme é maior se os planos dos dois anéis estiverem separados por uma distância igual ao raio dos anéis.



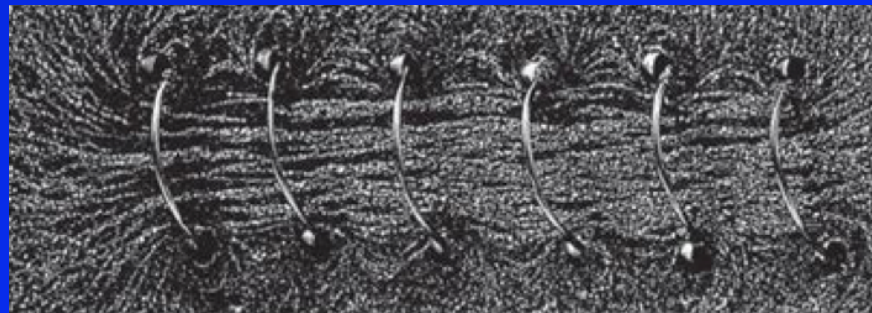
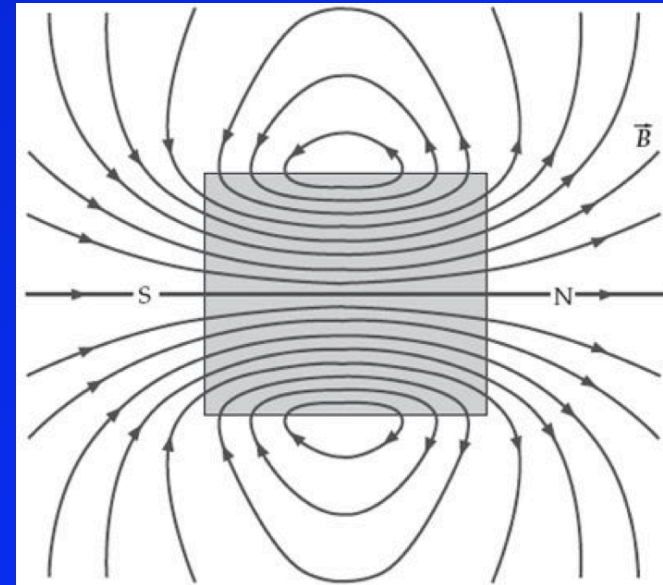
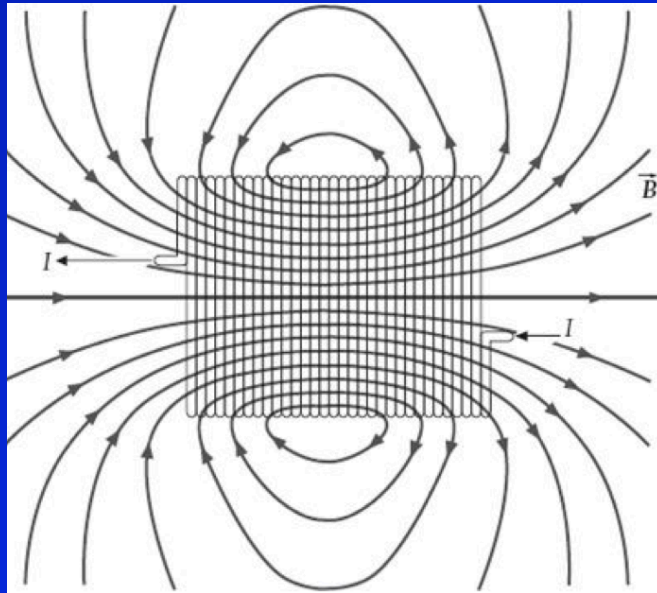
A figura mostra as linhas de campo magnético para um solenoide enrolado com as voltas bem próximas entre si.

Dentro do solenoide e distante das extremidades, as linhas de campo são aproximadamente paralelas ao eixo, estão próximas e uniformemente espaçadas, indicando um campo magnético intenso e uniforme.

Do lado de fora do solenoide e em suas extremidades a densidade de linhas é muito menor, indicando campo magnético menos intenso.



A figura da esquerda é a mesma apresentada no slide anterior e a figura da direita representa as linhas de campo magnético de um ímã em barra do mesmo tamanho e formato do solenoide mostrado no slide anterior. A semelhança das distribuições de linhas de campo, tanto no interior quanto no exterior deles, é muito grande.

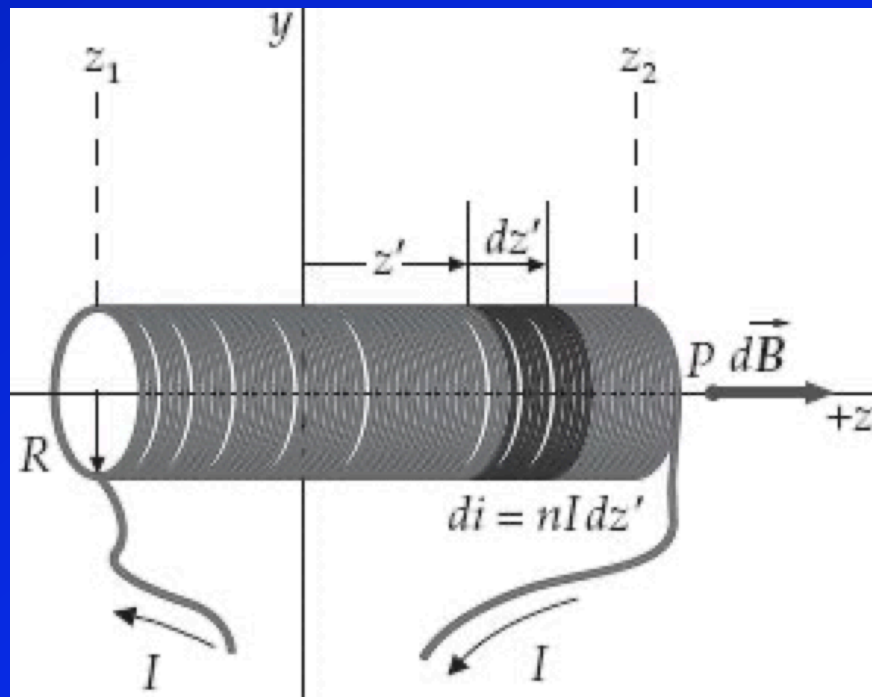


A figura acima apresenta limalha de ferro alinhada com o campo de um solenoide onde passa corrente.

Considere um solenoide de comprimento L , com N voltas e que conduz uma corrente I . Escolhemos o eixo do solenoide como o eixo z , com a extremidade esquerda em $z = z_1$ e a direita em $z = z_2$, como mostra a figura.

Calcularemos o campo magnético no ponto de campo P no eixo z a uma distância z da origem.

A figura mostra um elemento do solenoide de comprimento dz' a uma distância z' da origem.



Se $n = N/L$ é o número de voltas por unidade de comprimento, há $n dz'$ voltas do fio neste elemento, com cada volta conduzindo uma corrente I . O elemento é, portanto, equivalente a um único anel conduzindo corrente $di = nI dz'$.

Na aula passada, obtivemos que o campo magnético em um ponto P no eixo z devido a um anel na origem conduzindo corrente I é

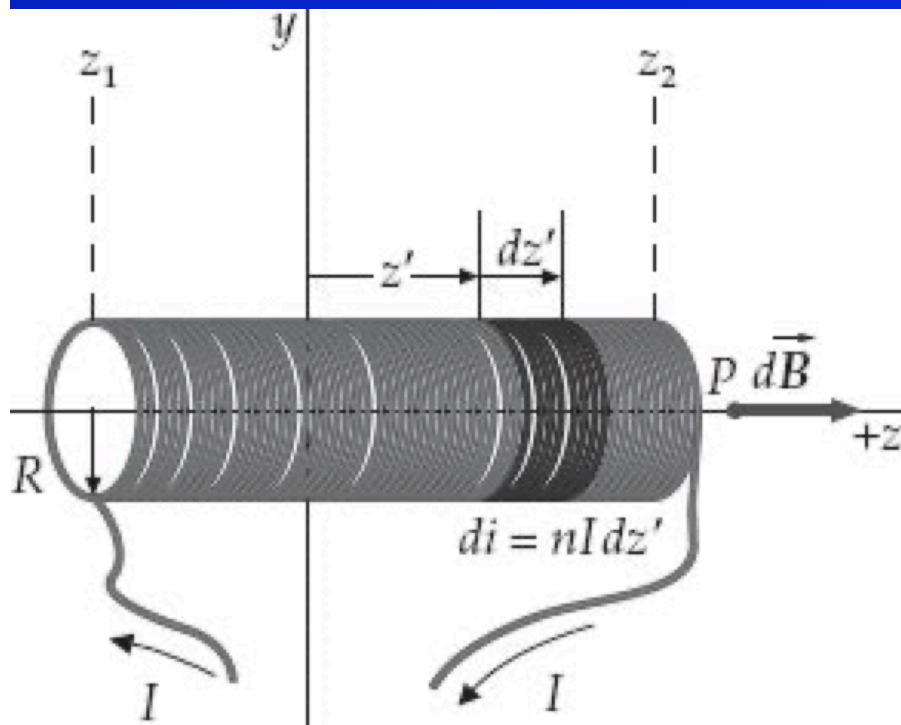
$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

que diferenciando, nos dá

$$dB_z = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{R^2 di}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

onde z é a distância entre o anel e o ponto de campo P .

Para um anel em $z = z'$ conduzindo corrente $di = nI dz'$, a distância entre o anel e o ponto de campo P é $z - z'$, então



$$dB_z = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{R^2 nI dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{3/2}}$$

Assim, determinaremos o campo magnético em P devido ao solenoide inteiro integrando a expressão desde

$z' = z_1$ até $z' = z_2$

$$B_z = \frac{1}{2}\mu_0 nIR^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{3/2}}$$

Retomando a última equação do slide anterior

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 n I R^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{3/2}}$$

Sendo o resultado da integral dado por

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + R^2]^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

obtendo o resultado

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

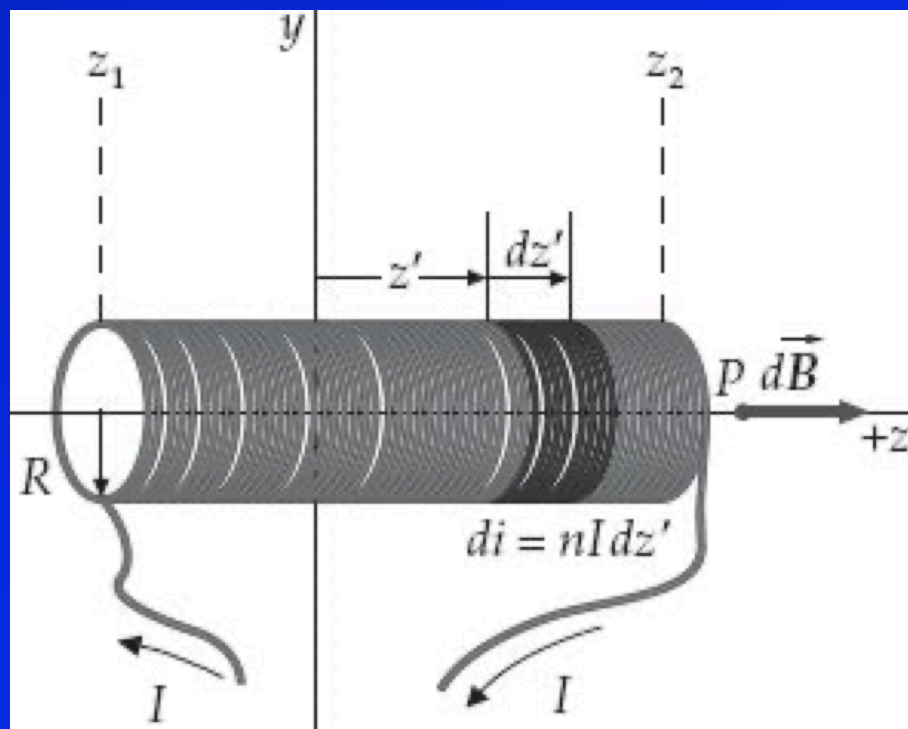
Retomando o resultado do slide anterior

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

Um solenoide é considerado longo quando

$$L \gg R$$

No interior de um longo solenoide e distante das extremidades, a fração à esquerda se aproxima de +1 e a fração à direita se aproxima de -1.



Isto significa que a expressão entre parênteses tende a +2.

Assim, na região interna e distante das bordas do solenoide, o campo magnético é dado por

$$B_z = \mu_0 n I$$

Para calcular B_z na extremidade direita do solenoide usamos

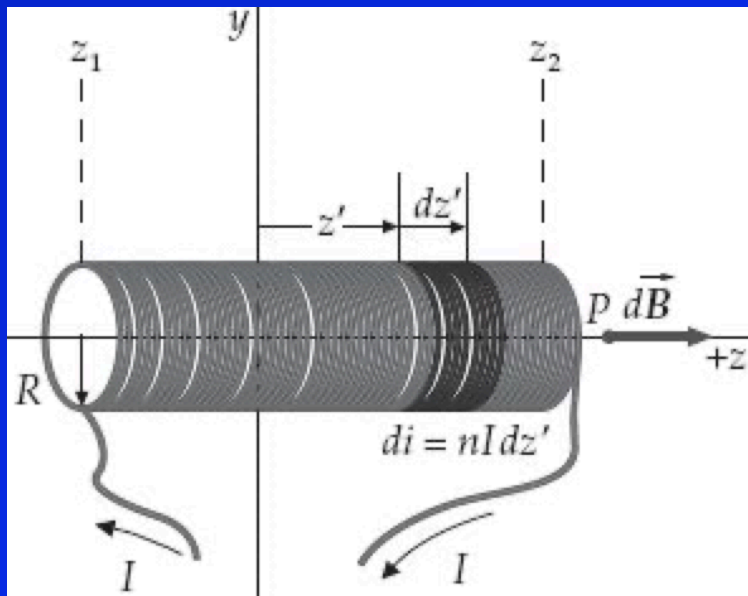
$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

com $z = z_2$, assim

$$B_z(z_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left(\frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + R^2}} - 0 \right) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}$$

onde foi usado que $L = z_2 - z_1$.

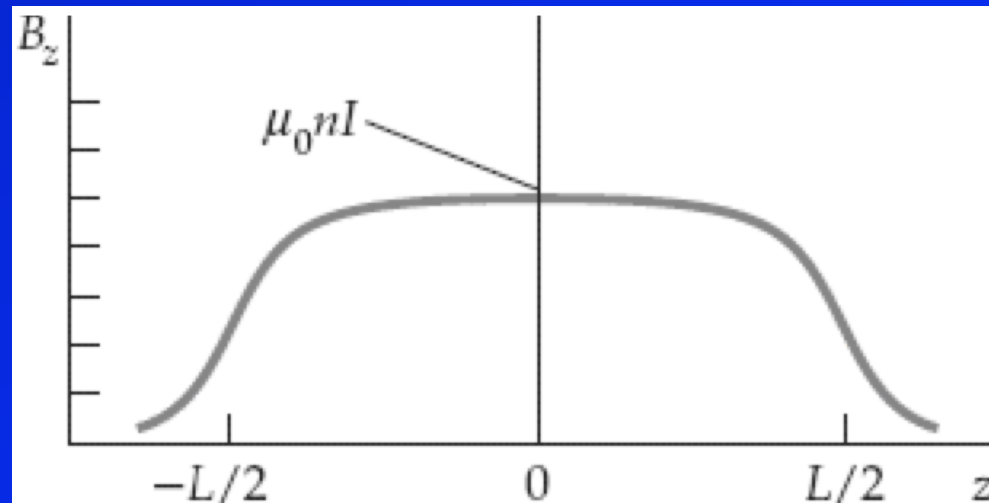
Assim, se $L \gg R$, então $\frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}} \rightarrow 1$ e $B_z(z_2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I$,



Que é a metade do valor de B em pontos no interior do solenoide, distante das bordas.

A figura mostra um gráfico do campo magnético no eixo de um solenoide versus a posição z no eixo (com a origem no centro do solenoide).

A aproximação onde o campo é uniforme ao longo do eixo é boa (independentemente da posição), exceto nas proximidades das bordas.



O solenoide que deu origem a esse gráfico tem comprimento L dez vezes maior que o raio R .

Exemplo 27-6 \vec{B} no centro de um solenoide

Determine o campo magnético no centro de um solenoide com 20,0 cm de comprimento, de raio 1,40 cm, com 600 voltas e uma corrente de 4,00 A.

Tomaremos o solenoide com seu eixo ao longo do eixo z e com seu centro na origem e usaremos a equação

$$B_z(z) = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + R^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + R^2}} \right)$$

com $z = 0$, $z_1 = -L/2$ e $z_2 = L/2$

$$B_z(0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(\frac{0 - (-\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[0 - (-\frac{1}{2}L)]^2 + R^2}} - \frac{0 - (\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[(0 - (\frac{1}{2}L))]^2 + R^2}} \right)$$

Retomando a equação do slide anterior

$$B_z(0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI \left(\frac{0 - (-\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[0 - (-\frac{1}{2}L)]^2 + R^2}} - \frac{0 - (\frac{1}{2}L)}{\sqrt{[(0 - (\frac{1}{2}L))]^2 + R^2}} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{\frac{1}{4}L^2 + R^2}} = \mu_0 nI \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

onde

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} = \frac{20,0 \text{ cm}}{\sqrt{(20,0 \text{ cm})^2 + 4(1,40 \text{ cm})^2}} = 0,990$$

Portanto

$$B_z(0) = 0,990 \mu_0 nI$$
$$= 0,990 (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{600}{0,200 \text{ m}} (4,00 \text{ A})$$
$$= \boxed{1,50 \times 10^{-2} \text{ T}}$$

Notem que a aproximação obtida usando $B_z = \mu_0 nI$ equivale a substituir 0,990 por 1. Fazendo isso chegamos a um resultado que difere do obtido aqui por apenas um por cento.

\vec{B} devido à corrente em um fio retilíneo

A figura mostra a geometria para calcular o campo magnético \vec{B} em um ponto P devido à corrente em um segmento retilíneo de fio.

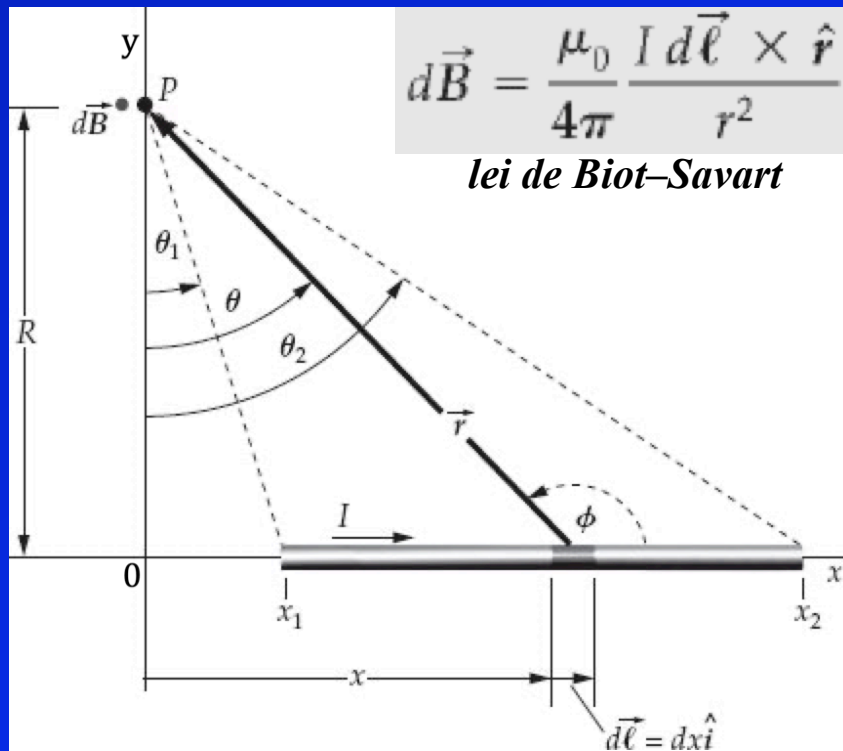
Considere o segmento de fio no eixo x ,
entre x_1 e x_2 e o ponto P no eixo y em $y = R$.

Um elemento típico de corrente $I d\vec{\ell}$ a uma distância x da origem é
mostrado na figura.

O vetor \vec{r} aponta do elemento $I d\vec{\ell}$
até o ponto de campo P .

A direção e sentido do campo
magnético em P , devido a este
elemento, é dada por $I d\vec{\ell} \times \hat{r}$,
que é \perp à tela, saindo dela.

Observe que, em P , os campos
magnéticos devidos a todos os
elementos de corrente do fio estão
na mesma direção e sentido.

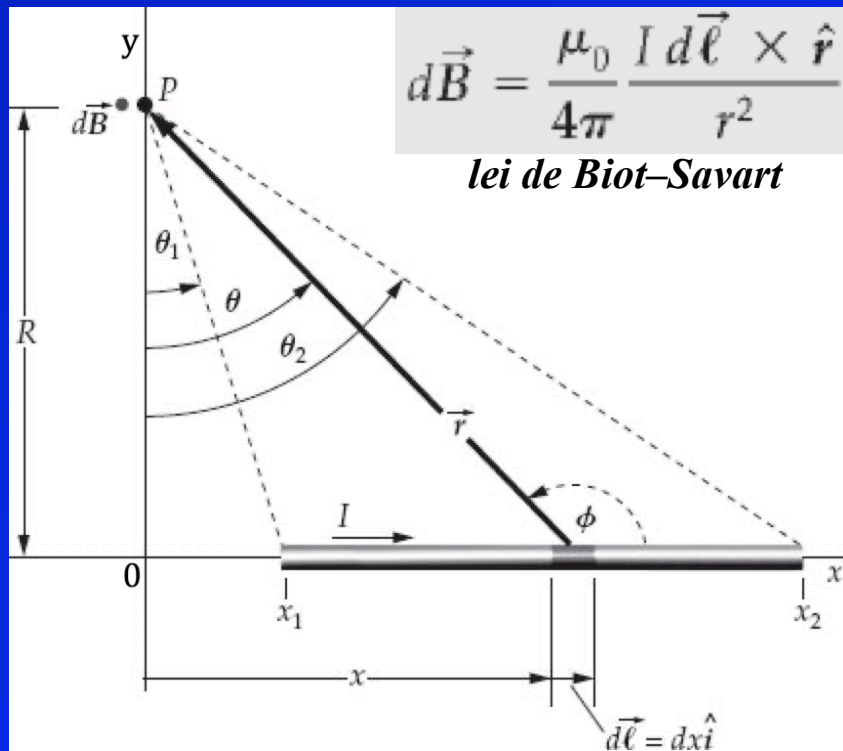


Assim, precisamos calcular apenas a magnitude do campo. O campo devido ao elemento de corrente mostrado na figura, pela lei de Biot-Savart, tem módulo dado por

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \text{sen } \phi$$

É mais conveniente escrever a equação em termos de θ em vez de ϕ

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta$$



Para somar sobre todos os elementos de corrente, precisamos relacionar as variáveis θ , r e x .

É mais fácil expressar x e r em termos de θ , assim, temos

$$\tan \theta = x/R \quad \therefore \quad x = R \tan \theta$$

que, diferenciando, fica

$$dx = \frac{R}{(\cos \theta)^2} d\theta = R \frac{r^2}{R^2} d\theta = \frac{r^2}{R} d\theta$$

Retomando as equações do slide anterior

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx}{r^2} \cos \theta$$

sendo $dx = \frac{r^2}{R} d\theta$

Assim,

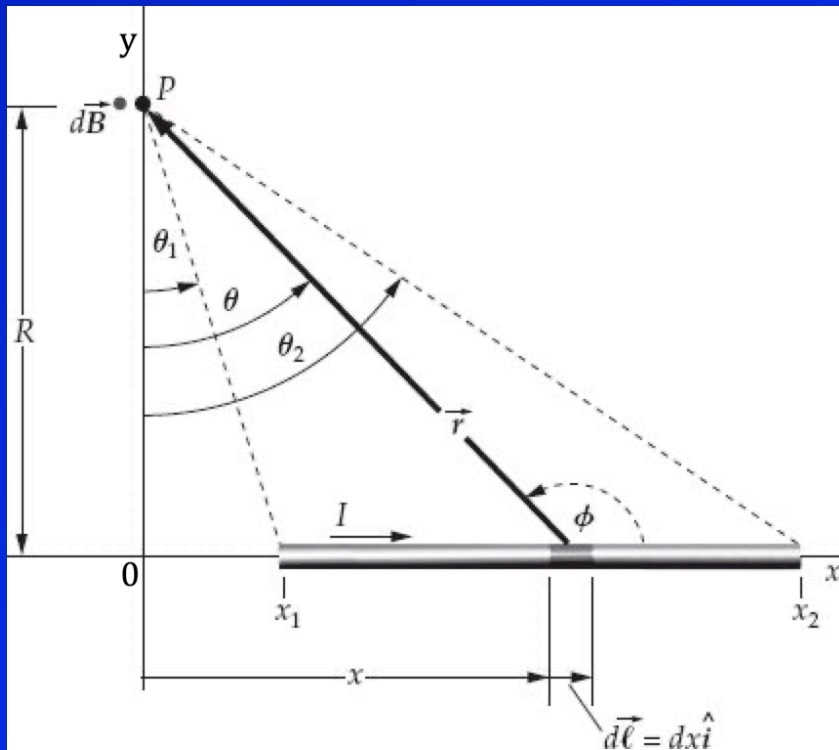
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta$$

integrando desde θ_1 até θ_2

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

resultando em

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

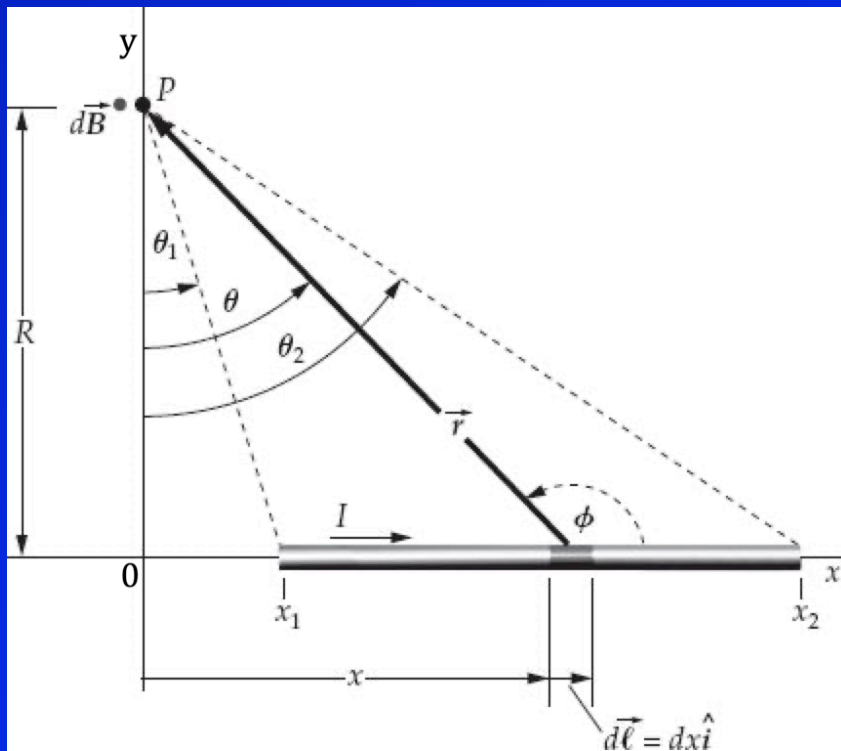


Este resultado

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

fornece o campo magnético devido a qualquer segmento de fio condutor retilíneo em termos de θ_1 e θ_2 e da distância R , perpendicular à direção e do fio.

Para obter o campo magnético para um fio infinito, basta tomar $\theta_1 = -90^\circ$ e $\theta_2 = +90^\circ$, o que nos dá



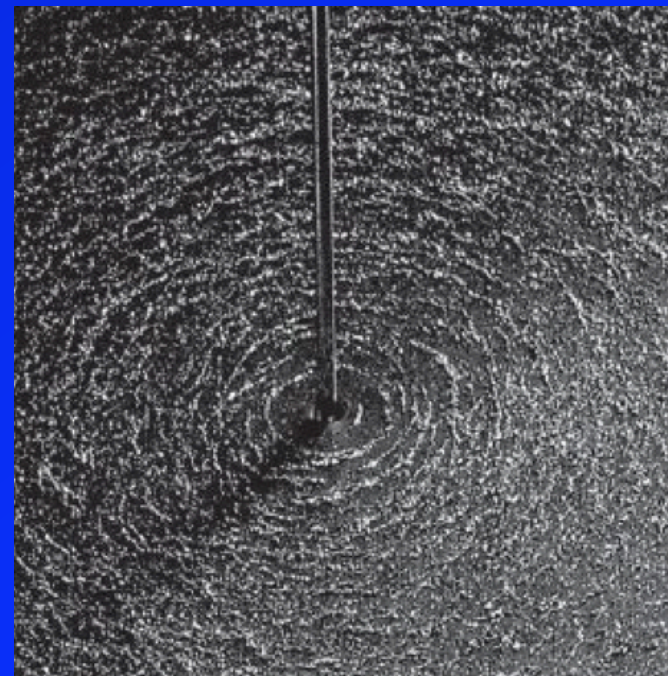
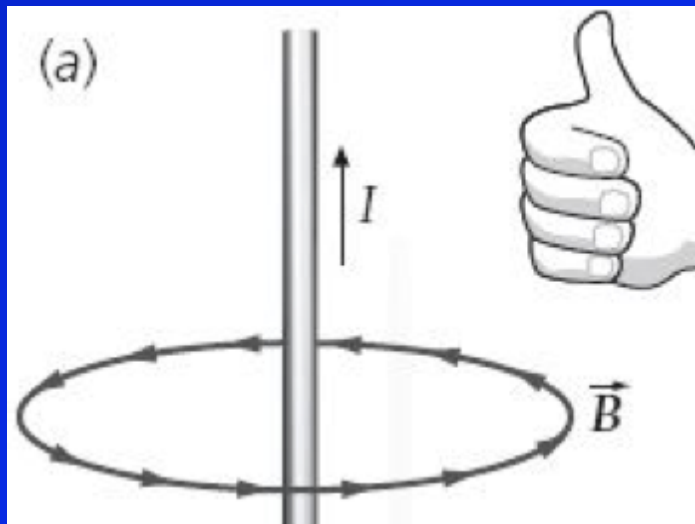
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$$

que é o campo magnético para um fio infinito retilíneo, onde R é a distância perpendicular ao fio do ponto onde se deseja obter o campo magnético.

Assim, em qualquer ponto do espaço, as linhas de campo magnético de um fio condutor longo e retilíneo são tangentes a um círculo de raio R em torno do fio, onde R é a distância perpendicular do ponto onde se deseja obter o campo magnético.

A direção de \vec{B} pode ser determinada aplicando a regra da mão direita, como mostra a figura da esquerda.

As linhas de campo magnético, portanto, contornam o fio, como mostra a figura da direita (foto utilizando limalha de ferro).



Exemplo 27-7 \vec{B} no centro de um anel quadrado de corrente

Determine o campo magnético no centro de um anel de corrente quadrado de lado $L = 50$ cm e que conduz corrente de 1,5 A.

O campo magnético no centro do quadrado é a soma das contribuições de cada um dos quatro lados do anel.

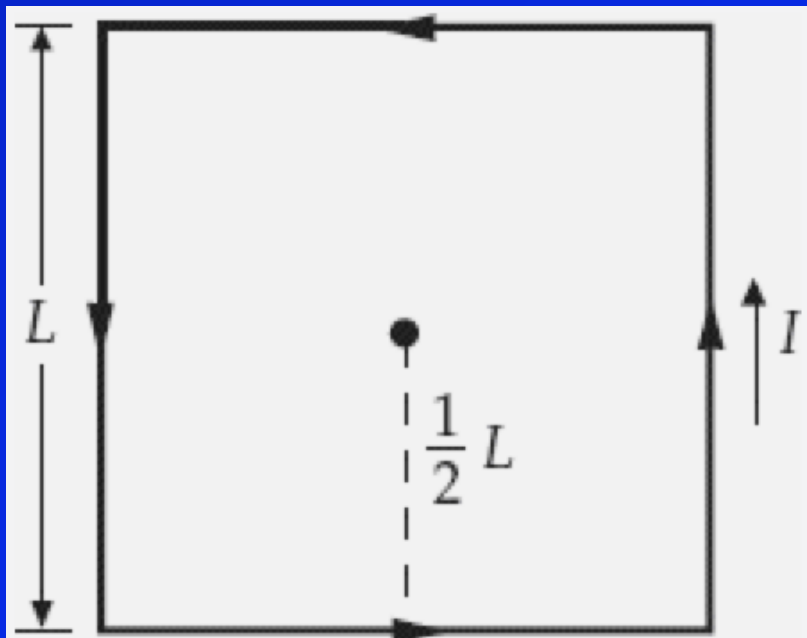
Da figura vemos que o campo produzido por cada um dos lados do quadrado tem a mesma magnitude e aponta para fora da página.

Assim, usaremos a equação

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

para um dos lados e multiplicaremos o resultado por 4 para obtermos o campo total

$$B = 4B_s$$

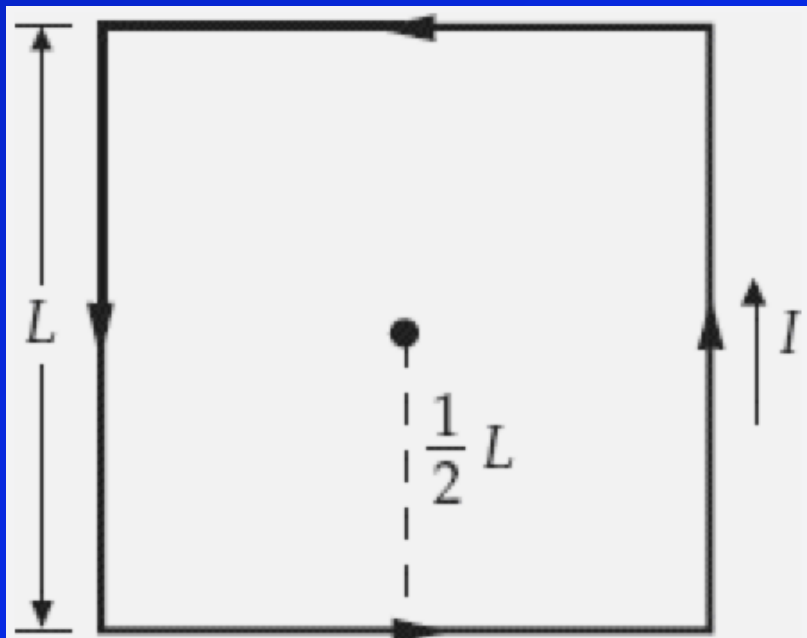


Exemplo 27-7 \vec{B} no centro de um anel quadrado de corrente

Determine o campo magnético no centro de um anel de corrente quadrado de lado $L = 50$ cm e que conduz corrente de 1,5 A.

Assim, sendo $B = 4B_s$,

$$B_s = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\frac{1}{2}L} [\sin(+45^\circ) - \sin(-45^\circ)]$$
$$= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{1,5 \text{ A}}{0,25 \text{ m}} 2 \sin 45^\circ = 8,5 \times 10^{-7} \text{ T}$$



onde usamos $R = L/2$,
 $\theta_1 = -45^\circ$ e $\theta_2 = +45^\circ$.

Portanto

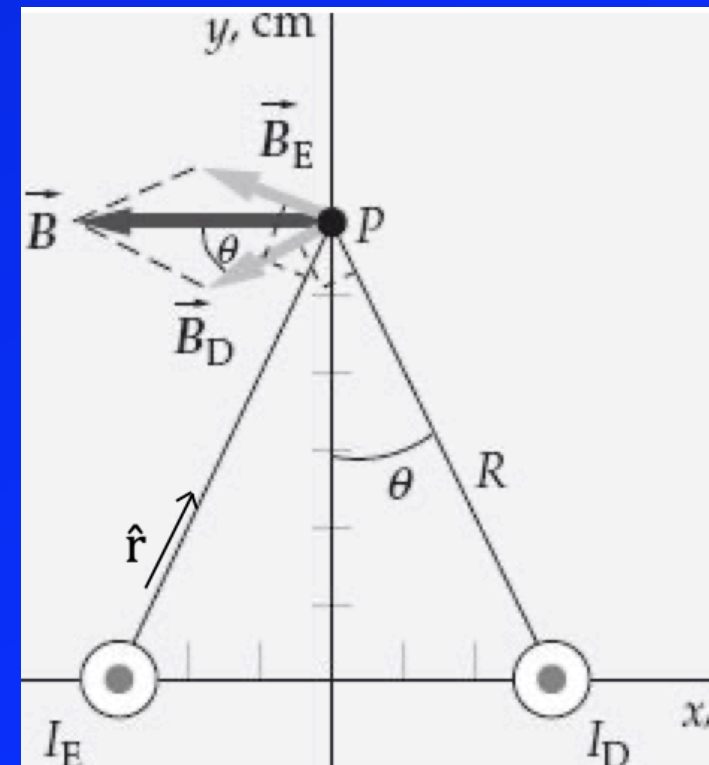
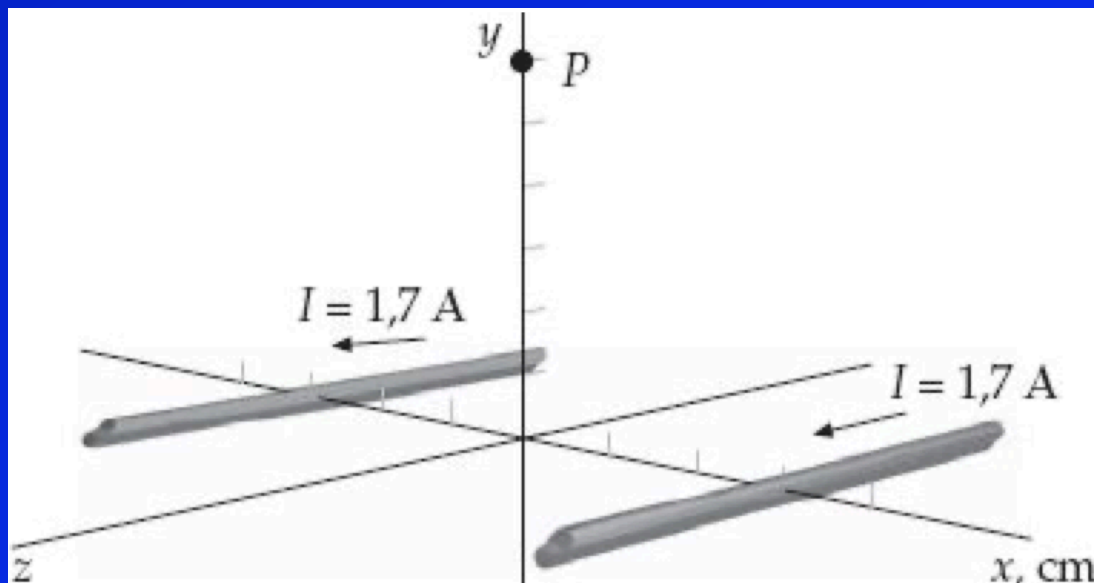
$$B = 4B_s = 4(8,5 \times 10^{-7} \text{ T}) = \boxed{3,4 \times 10^{-6} \text{ T}}$$

Exemplo 27-8 \vec{B} devido a dois fios paralelos

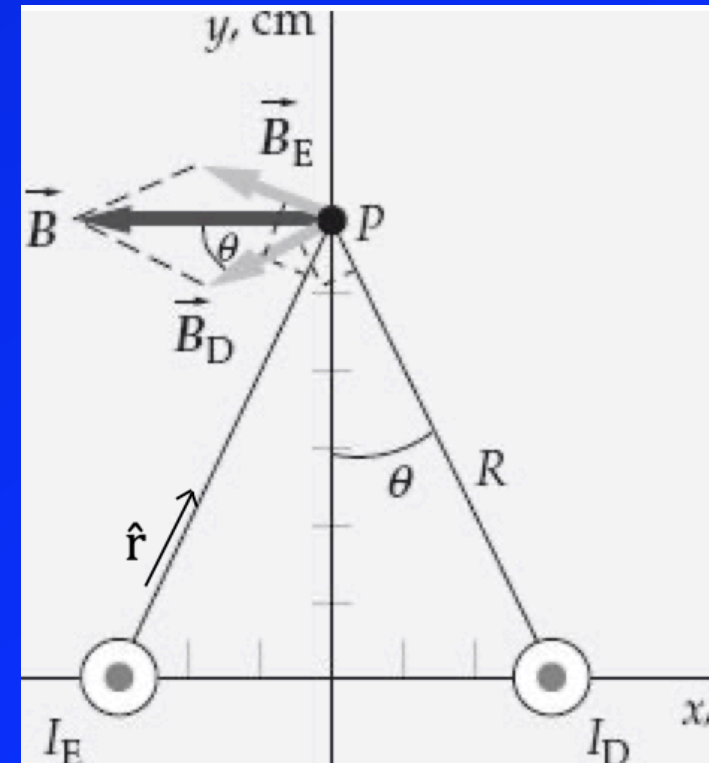
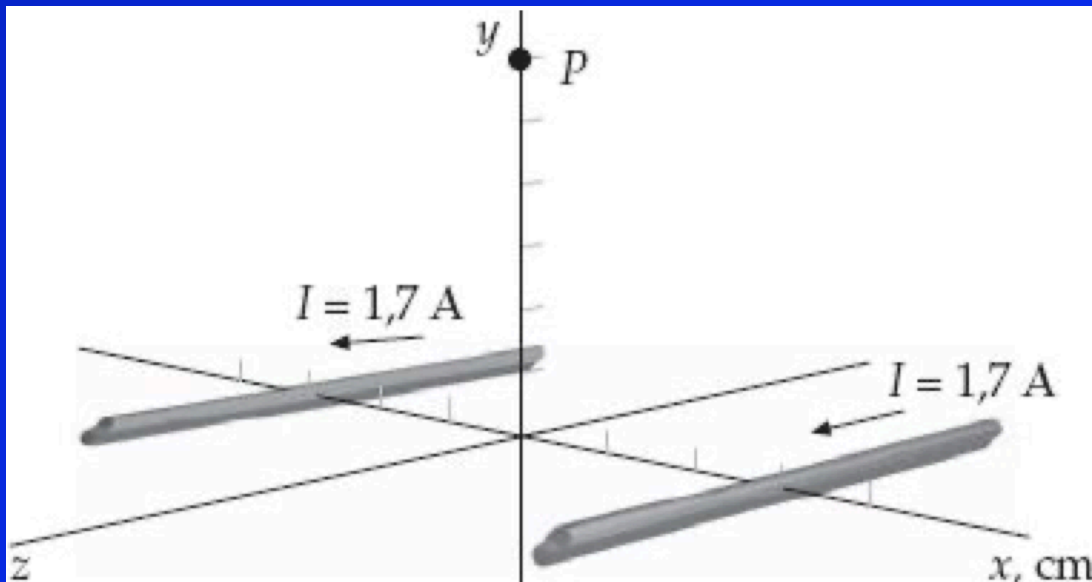
Um fio retilíneo e longo conduz uma corrente de $1,7\text{ A}$ na direção $+z$ e está ao longo da linha $x = -3,0\text{ cm}$, $y = 0$.

Um outro fio como este conduz uma corrente de $1,7\text{ A}$ na direção $+z$ e está ao longo da linha $x = +3,0\text{ cm}$, $y = 0$, como mostra a figura.

Determine o campo magnético no ponto P no eixo y em $y = 6,0\text{ cm}$.



O campo magnético \vec{B} no ponto P é a soma de \vec{B}_E devido ao fio à esquerda, e de \vec{B}_D devido ao fio à direita. Como os fios conduzem a mesma corrente e estão à mesma distância de P , os módulos dos campos \vec{B}_D e \vec{B}_E são iguais. \vec{B}_E é \perp a \hat{r} que parte perpendicularmente do fio da esquerda apontando para o ponto P , da mesma forma, \vec{B}_D é \perp ao versor que parte perpendicularmente do fio da direita apontando para o ponto P .



Assim, $\vec{B} = \vec{B}_E + \vec{B}_D$.

Da figura da direita vemos que o campo magnético resultante é

$$\vec{B} = -2B_E \cos\theta \hat{i}$$

onde $B_E = B_D = \frac{\mu_0 2I}{4\pi R}$, sendo R dado por

$$R = \sqrt{(3,0 \text{ cm})^2 + (6,0 \text{ cm})^2} = 6,7 \text{ cm}$$

então

$$B_E = B_D = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{2(1,7 \text{ A})}{0,067 \text{ m}} = 5,07 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$\cos\theta = \frac{6,0 \text{ cm}}{R} = \frac{6,0 \text{ cm}}{6,7 \text{ cm}} = 0,894$$

$$\vec{B} = -2(5,07 \times 10^{-6} \text{ T})(0,894)\hat{i} = \boxed{-9,1 \times 10^{-6} \text{ T} \hat{i}}$$

