MAP 2121 - CÁLCULO NUMÉRICO (POLI)

Lista de Exercícios sobre Interpolação e Integração

1: Sejam $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

(a) Determine os polinômios de Lagrange $L_i(x)$ correspondentes a estes pontos e mostre que eles são dois a dois ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{3} \phi(x_k)\, \psi(x_k).$$

(b) Encontre o polinômio de grau ≤ 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \text{sen}(\pi x/2)$ segundo o produto interno dado. Qual o erro quadrático cometido? Surpreso?

2: Utilizando interpolação polinomial de grau ≤ 3 para a tabela abaixo, estime o valor de sen (0.65). Delimite o erro cometido em tal estimativa sem empregar o valor exato de sen (0.65).

x_i	0	0.5	0.75	1
$\text{sen}\, x_i$	0	0.479	0.682	0.841

3: Considere a seguinte tabela de diferenças simples de uma certa função f.

x_i	$f(x_i)$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
-1.0	4						
		-3					
-0.5	1		10				
		...		-21			
0.0	8		-11		17		
		-4		-4		...	
0.5	...		...		...		...
		...		...		2	
1.0	...		-3		18		
		-22		...			
1.5	-37		...				
		...					
2.0	-32						

(a) Preencha as lacunas da tabela.

(b) Determine o polinômio interpolador (de grau ≤ 6) na forma de Newton relativo à tabela inteira.

(c) Determine o polinômio de grau ≤ 3 que interpola f nos últimos 4 pontos da tabela.

(d) Sabendo que $f(3) = -5$, qual dos dois polinômios obtidos nas partes (b) e (c) é o que melhor aproxima f no ponto $x = 3$?

4: (a) Utilizando a Fórmula de Simpson, calcule numericamente a integral definida

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos^2 t}\, dt,$$

a partir dos dados da seguinte tabela:

t	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$
$f(t)$	$e^{1/4}$	$e^{3/4}$	e	$e^{3/4}$	$e^{1/4}$

onde $e = 2.718282\ldots$ e $f(t) = e^{\cos^2 t}$.

(b) Delimite o erro cometido na integração numérica efetuada na parte (a), sabendo que no intervalo $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$ temos $|f^{(4)}(t)| \leq 20e$.

5: Seja $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ e considere a tabela

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	0	-1	0

(a) Determine o polinômio interpolador $p(x)$ da tabela na forma de Newton usando diferenças simples.

(b) Estime o erro da interpolação, ou seja, encontre uma cota superior para $|f(x)-p(x)|$, $x \in [0,3]$.

6: (a) Estime o valor da integral

$$\int_1^5 \log x \, dx$$

usando o método de Simpson e os pontos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ e $x_4 = 5$.

(b) Quantos pontos devemos levar em conta na integração por Simpson para que a diferença entre o valor aproximado e o valor exato da integral seja menor do que 10^{-3} ? Justifique.

7: Considere a função $F(x)$ dada por

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\cos y) \, dy.$$

Utilizando a fórmula de Simpson com uma repetição, calcule

$$S = \int_0^1 F(x) \, dx.$$

Para obter cada um dos valores de F necessários ao cálculo de S, utilize a fórmula dos trapézios com duas repetições. Estime os erros cometidos no cálculo desses valores.

8: Seja $f(x) = \int_0^x e^{\cos y} dy$.

(a) Use o método de n-trapézios para calcular os valores $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$ com erro menor que 10^{-2} (justifique a escolha dos valores de n).
(Dado: o erro na integração por n trapézios é limitado por $\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|(b-a)h^2/12$.)

(b) Determine o polinômio interpolador (de grau menor ou igual a 3) de f nos pontos 0, 1, 2 e 3 (usando os valores calculados no item (a)).

9: Dados 4 pontos uniformemente espaçados x_1, x_2, x_3 e x_4 (onde $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1,2,3$), determine coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 tal que para todo polinômio de grau menor ou igual a 3 tenhamos

$$p\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i p(x_i).$$

10: No cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ com o método de 1 trapézio obtemos o valor 4/3, com o método de 2-trapézios obtemos o valor 7/6 e com 4-trapézios 67/60. Determine que valores obtemos ao se calcular a integral pelos métodos de Simpson e 2-Simpsons.

11: (a) Mostre que $\int_{-1}^1 p(x)dx = p(\sqrt{3}/3) + p(-\sqrt{3}/3)$, para todo polinômio p de grau menor ou igual a 3.

(b) **Use o item (a)** para calcular $\int_0^3 (x^3 - 2x)dx$.

12: É dada a função f tabelada a seguir:

$f(x)$	1.0	0.5	0.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	1.0
x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0

Determine o polinômio de grau menor ou igual a dois que interpola $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ nos pontos $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ (utilizando o método de n-simpsons para avaliar $F(t)$). Determine então o polinômio interpolador de F (de grau 3) nos pontos 0, 0.5, 1 e 2.

13: Calcule $\int_0^1 e^{-x} dx$:

(a) pelo método de n-trapézios, para $n = 1, n = 2$ e $n = 4$, ($h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$).

(b) Utilize os valores do item (a) para calcular $\int_0^1 e^{-x}\, dx$ pelo método de n-Simpsons com $n = 1$ e $n = 2$.

(c) Estime qual o valor de h para calcular $\int_0^1 e^{-x}\, dx$ pelo método de n-simpsons com erro menor que 10^{-5} e faça o cálculo da integral. Compare a estimativa com o erro realmente obtido. Dado: Erro com n-simpsons: $|E| \leq \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| h^4 (b-a)/180$.

14: Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_a^b f(x)\, dx$ dividimos $[a, b]$ em pontos uniformemente espaçados $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$ ($x_{i+1} = x_i + h$, $h = (b - a)/3$) e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio linear que interpola f nos pontos interiores x_1 e x_2.

(a) Qual fórmula de integração se obtém nesse caso?

(b) Use-a para calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. Qual a vantagem em relação ao método de Simpson?

(c) Refine o cálculo da integral do item (b) usando a fórmula com repetições (para dois sub-intervalos e para 4 sub-intervalos). Como se comporta o erro em relação a h? (Use o valor exato da integral para comparações.)

15: É dada a seguinte fórmula de integração numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w\big(f(x_1) + f(-x_1)\big) + (1 - w)\big(f(x_2) + f(-x_2)\big),$$

onde $w = 0.347855$, $x_1 = 0.861136$ e $x_2 = 0.339981$. Esta fórmula é exata (a menos de erros de arredondamento) para polinômios de grau até 7. Verifique este fato integrando: $\int_0^1 x^5\, dx$ (sim, use uma mudança de variáveis!). Use a fórmula também para avaliar $\int_1^2 (1/x)\, dx$ e determine o erro efetivamente cometido.

16: Dados pontos $x_0 < x_1 < ... < x_n$ sabemos que $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$ é o polinômio interpolador de f de grau menor ou igual a n (escrito na forma de Lagrange). Use este fato para mostrar que:

(a) $\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1$, para todo x real.

(b) $\sum_{i=0}^n L_i(0) x_i^k = 0$, para $k = 1, 2, ..., n$. (Pense!)

17: (a) Calcule o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola a função $\text{sen}(\pi x/2)$ nos pontos $x_i = i$, $i = 0,\ldots,4$. Utilize-o para estimar $\text{sen}(\pi/4)$, delimitando o erro. Dado: erro na interpolação é menor ou igual a

$$\frac{\max_{y\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \Big|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\Big|$$

(b) Sabendo que $p(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ é o polinômio de grau menor ou igual a 4 que interpola uma função $f(x)$ nos pontos $x_i = i$, $i = 0,\ldots,4$, determine o polinômio de grau 3 que interpola esta mesma função f nos pontos 0, 1, 3 e 4.

18: É dada uma funcão contínua $s(x) = p(x) + q(x)$, onde $p(x)$ é um polinômio quadrático e $q(x)$ é tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $q(m - x) = -q(m + x)$, onde $m = (a + b)/2$. Mostre que $\int_a^b s(x)\, dx$ é calculada exatamente pelo método de Simpson.

19: (a) Calcule $\int_1^3 \frac{1}{5x-2} dx$ pelo método de n-trapézios, com $n = 1, 2$ e 4. Estime qual seria o valor de n necessário para garantir um erro menor que 10^{-3}.
(Erro n-trapézios: $|E_n| \leq h^2 (b - a) \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|/12$.)

(b) Seja $T(h)$ a aproximação do valor da integral do item (a) obtida com o método dos trapézios com passo h. O valor exato da integral é o limite dos valores $T(h)$, com h tendendo a zero. Podemos tentar estimar este valor calculando o polinômio de grau 2 que interpola $T(h)$ nos pontos $h = 2$, $h = 1$ e $h = 0.5$ e avaliando seu valor em $h = 0$ como estimativa para o valor da integral. Faça isto e compare os valores obtidos com o valor exato da integral.

20: Desejamos aproximar o valor de $\log_2 5/2$ através de interpolação polinomial, usando para tal os valores conhecidos de $\log_2 x$, nos pontos 1, 2, 4 e 8. Usando diferenças divididas, calcule os polinômios interpoladores de $\log_2 x$ nos pontos 2 e 4 (linear), 2, 4 e 8 (quadrático) e 1, 2, 4 e 8 (cúbico). Delimite o erro cometido na aproximação de $\log_2 5/2$ em cada caso. Dado: erro na interpolação é menor ou igual a

$$\frac{\max_{y\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|$$

21: É dada uma função contínua f definida em [0,4], tal que $f(x) = x^2 - 3x + 2$ para $x \in [0,1]$, $f(x) = -x^2 + 5x - 4$, para $x \in [1, 5/2]$ e $f(x) = 3(2 - x/2)$ em $[5/2, 4]$.

(a) Calcule $\int_0^4 f(x)dx$ pelo método de 2-Simpsons e 4-Simpsons (ou seja, com espaçamentos $h = 1$ e $1/2$). Algum destes resultados fornece o valor exato da integral? Justifique!

(b) Usando os valores de f apenas nos pontos 0, 1/2, 1, 7/4, 5/2 e 4 obtenha o valor exato da integral! Justifique! (Obs: trabalhe com frações)

22: A função $F(t) = 100/(1 + 9e^{-t/2})$ representa a evolução de uma população a partir de $t = 0$. Valores aproximados desta população estão na tabela a seguir:

t	0	1	2	3	4	5	6
$F(t)$	10	15	23	33	45	58	69

Determine, usando a tabela, o polinômio p de grau menor ou igual a 3 que interpola F nos pontos 1, 2, 4 e 6 (use diferenças divididas). Faça um gráfico comparativo entre F e p no intervalo $[0, 12]$.

23: (*continuação da questão 22*) A população média entre o instante 0 e o instante 6 é dada por

$$P_m = \frac{\int_0^6 F(t)dt}{\int_0^6 dt}$$

Aproxime o valor de P_m através do método de 3 e 6-trapézios (use os dados da tabela da questão 22), e de 1 e 3-Simpsons. Compare os resultados obtidos com o valor exato da integral, a ser determinado por você.

24: A função $F(t) = 100/(1 + 9e^{-t/2})$ é solução da equação diferencial ("crescimento logístico"):

$$x'(t) = \frac{x(t)}{2}\left(1 - \frac{x(t)}{100}\right), \qquad x(0) = 10$$

Verifique que $F(t)$ é realmente solução da equação. Partindo de $x(0)$=10, utilize o método de Euler com $\Delta t = 1$, e com $\Delta t = 0.5$, para aproximar o valor de $x(1)$.

25: Utilize o método de Euler e dos Trapézios com $\Delta t = 0.5$, para calcular uma aproximação para $X(1)$, onde $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma solução da equação

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t), \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações

26: Interpole a função $x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$ por um polinômio de grau menor ou igual a 3 nos pontos $t_i = ih$, $i = 0, \ldots, 3$ e $h = 0.2$. Use este polinômio para estimar o valor de $x(0.5)$ e estime o erro cometido. Compare a estimativa com o erro efetivamente cometido.

27: Considere os valores da função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelados nos pontos $x_0 = 1.69$, $x_1 = 1.96$, $x_2 = 2.25$ e $x_3 = 2.56$.

a) Determine dentre estes os 3 pontos mais convenientes para aproximar o valor de $\sqrt{2}$ através de interpolação por polinômios de grau 2, baseando-se na fórmula do erro de interpolação.

b) Aproxime $\sqrt{2}$ pelo polinômio interpolador de grau 3 (use diferenças divididas).

c) Conclua dos dados de sua tabela de diferenças que há um ponto c no intervalo $[x_0, x_3]$ tal que $f''(c) = -0.08$ (Justifique).

28: A velocidade v de um corpo movendo-se horizontalmente foi medida em alguns instantes, obtendo-se a tabela

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$v(m/s)$	8.9	11.1	12.4	12.2	10.7	8.3	6.1

Sabendo-se que a posição inicial era $x(0) = 23m$, determine a posição $x(t)$ nos instantes $t = 2, 4$ e 6 usando a fórmula de Simpson com o menor espaçamento possível. Obtenha uma expressão para $x(t)$ usando interpolação polinomial nos instantes $t = 0, 2, 4, 6$ (*use a forma de Newton*). Calcule então $x(2.5)$.

29: É dada a função $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Determine pelo método de Newton os polinômios de grau menor ou igual a 3 que interpolam f nos pontos -2, 0, 1 e 2 e nos pontos 0, 1, 2 e 3, respectivamente. Use-os para estimar $f(1/2)$ e delimite o erro cometido em cada caso. Confronte as estimativas com o erro real.

30:

a) Calcule o polinômio de grau menor ou igual a dois que interpola $f(x) = x^3$ nos pontos $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ pelo método de Lagrange.

b) Determine exatamente os valores $A_i = \int_{-2}^{2} L_i(x)dx$ usando o método de Simpson, onde $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ são os polinômios de Lagrange usados no item a).

c) Use os valores de A_i para obter uma aproximação de $\int_{-2}^{2} f(x)dx$. Qual o erro nesta aproximação?

31: Calcule $\int_1^2 x^2 lnx\, dx$ pelos métodos de n-trapézios e n-Simpsons de forma a garantir um erro menor que 0.025 e que 5×10^{-5}, respectivamente. Calcule o valor exato da integral e verifique se os erros ficaram de acordo com as limitações das estimativas.

32: Determine o espaçamento h necessário para aproximar o valor numérico da integral $\int_0^1 sen(cos^2(ax))dx$ pela regra dos trapézios com erro menor que $\epsilon = 0.01$. Calcule $\int_0^1 sen(cos^2(2x))dx$ com erro menor que $\epsilon = 0.01$. Dado: $|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''|$.

33: Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ e considere $x_j = x_0 + jh$, para $j = 0, 1, 2, 3$. Suponha que f seja uma função contínua com derivadas contínuas até ordem 3 no intervalo $[x_0, x_3]$. Encontre uma fórmula de integração para f do tipo

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = af(x_0) + bf(x_1) + cf(x_2)$$

que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a dois. Estime o erro em termos da derivada f'''. Dado: Erro de interpolação polinomial $E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

34: Determine uma fórmula de integração do tipo

$$\int_0^1 f(x)dx = af(1/4) + bf(1/2) + cf(1)$$

que seja exata para todo o polinômio de grau menor ou igual a 2. Utilize-a para aproximar a integral da função $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ no intervalo $[0, 1]$.