Equações diferenciais de $1^{\underline{a}}$ ordem
Ordinaria

Por uma equação diferencial de $1^{\underline{a}}$ ordem entendemos uma equação do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), \qquad (\text{ou } y' = F(x,y)),$$

onde $F(x,y)$ é uma função definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Uma função $y = y(x)$ definida num intervalo aberto I é uma <u>Solução</u> dessa equação se, $\forall x \in I$ temos que:

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

<u>Exemplo</u>: ① $y = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Observe que $y(x)$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

De fato: note que $F(x,y) = 2xy$, e que a derivada

$$y' = 2x e^{x^2} \Rightarrow y' = 2xy.$$

② $y = e^{x^2} + 9$, $x \in \mathbb{R}$. também é solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - 18x = F(x,y).$$

Pois $y' = 2xe^{x^2} \Rightarrow 2xe^{x^2} \overset{?}{=} 2x(e^{x^2}+9) - 18x = 2xe^{x^2}$.

③ Determine uma solução $y = y(x)$ da equação $\frac{dy}{dx} = 3x + 5$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 2$.

De fato: queremos uma função $y = y(x)$ tal que $y(0) = 2$ e cuja derivada seja $3x + 5$.

<u>Procedimento</u>: $y' = 3x + 5 \Rightarrow y(x) = \int (3x+5)\,dx =$

$$= \frac{3x^2}{2} + 5x + C.$$

Como $y(0)=2 \Rightarrow 2 = \frac{3}{2}(0)^2+5(0)+c \Rightarrow c=2.$

Logo a solução é $y(x) = \frac{3}{2}x^2+5x+2.$

(4) Ache as soluções da equação $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y = 2+x.$

Depois determine a solução $y=y(x)$ tal que passe por $(0,2)$.

Solução: Note que $y(x) = 2x + ce^{-x/2}$ é solução.

Pois $y' = 2 - \frac{x}{2}ce^{-x/2} \Rightarrow$

$$2-\frac{x}{2}ce^{-x/2} + \left(\frac{1}{2}\right)\left[2x+ce^{-x/2}\right] =$$

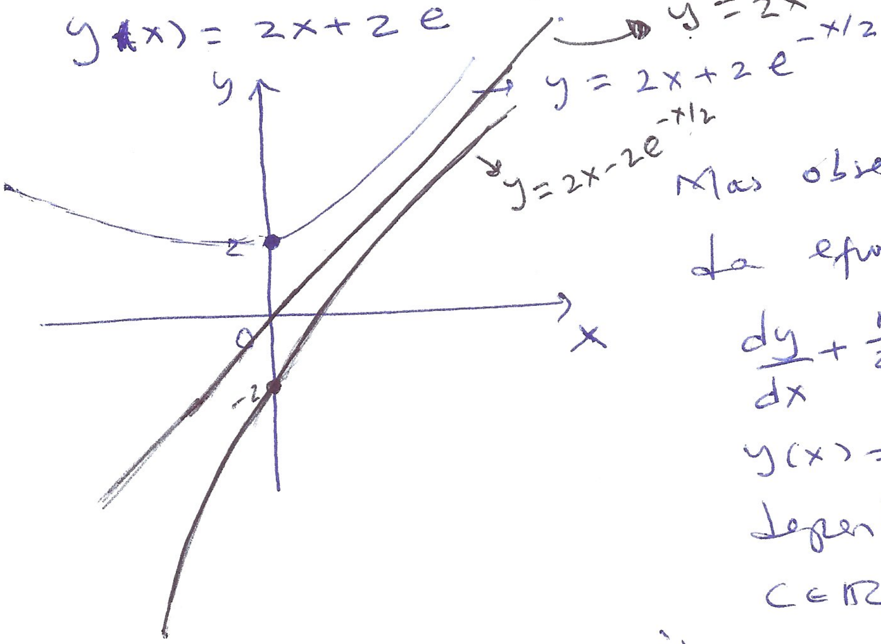
$$= 2-\frac{x}{2}ce^{-x/2} + x + \frac{c}{2}e^{-x/2} = 2+x.$$

Como precisa passar pelo ponto $(0,2) \Rightarrow$

$$2 = 2(0)+ce^{0} = c \Rightarrow c=2.$$

Logo a solução da equação com a condição inicial $(0,2)$ é

$$y(x) = 2x+2e^{-x/2}$$



Mas observe que a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y = 2+x$$ é

$y(x) = 2x+ce^{-x/2}$, e então depende dos valores das constantes $c \in \mathbb{R}$.

i) se $c=0$: $y=2x$

se $c=1$: $y = 2x+e^{-x/2}$

se $c=-2$: $y = 2x-2e^{-x/2}$

Então temos uma família de soluções da equação.

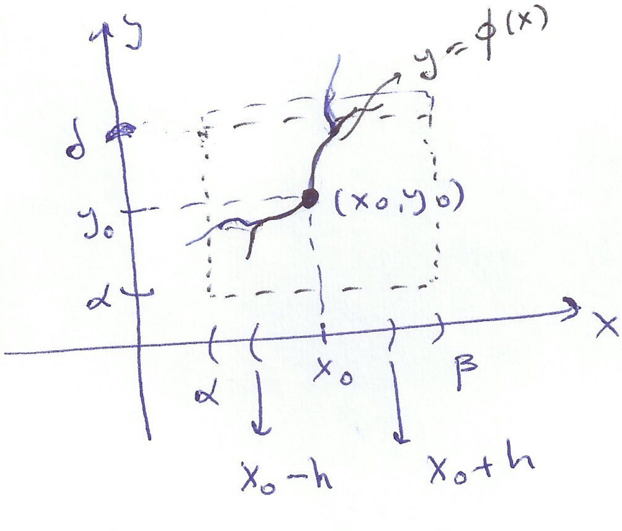
Ao estudar um problema de valor inicial

$$y' = F(x,y) \quad \text{com} \quad y(x_0) = y_0,$$

as questões básicas a serem consideradas são:
se a solução existe, se a solução é única, em qual intervalo a solução esta definida?
Tais perguntas tem respostas dadas pelo seguinte <u>teorema de existência e unicidade de soluções:</u>

<u>Teorema</u>: Sejam as funções F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas num certo retângulo $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ que contém o ponto (x_0, y_0). Então num certo intervalo $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (\alpha, \beta)$ há uma única solução $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



$F(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas no retângulo: $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

Nosso objetivo é estudar as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Para tal estudo assumimos que a função $F(x,y)$ tem formas especiais.

A) Equações de variáveis separáveis:

Definição: Uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem de variáveis separáveis, é uma equação da forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \text{, onde } g \text{ e } h \text{ são funções}$$

definidas em intervalos abertos I_1 e I_2 respectivamente.

Exemplo: 1) $\frac{dy}{dx} = xy^2$ é de variáveis separáveis, onde $g(x)=x$ e $h(y)=y^2$.

2) $\frac{dy}{dx} = x^2+y^2$ não é de variáveis separáveis.

Determinar as soluções constantes e não constantes de $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, caso existam.

1) Constantes: Suponha que $y(x)=a$, $x \in I_1$, com a constante é solução da equação $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$.

logo $y'(x) = g(x)h(a)$ ou seja

$$0 = g(x)h(a)$$

logo supondo que $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I_1$, devemos ter que $h(a)=0$. Assim para que uma função constante $y(x)=a$, $x \in I_1$ seja uma solução ~~[illegible]~~ devemos ter que a seja raiz da equação $h(y)=0$.

2) Não constantes:

Como $\frac{dy}{dx} = g(x) h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$

separação de variáveis

$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \rightarrow H(y) = G(x) + k$, k = constante de integração,

e onde $H(y)$ e $G(x)$ são primitivas de $\frac{1}{h(y)}$ e $g(x)$ respectivamente.

Pode ser provado que se $g(x)$ for contínua em I_1 e, $h'(y)$ é contínua em I_2, então todas as soluções não-constantes da equação, serão obtidas pelo processo acima.

Exemplo: Resolva a equação $\frac{dy}{dx} = xy^2$.

Constante: $h(y) = y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Logo a única solução constante da equação é $y = 0$.

Não-constantes: $\frac{dy}{dx} = xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + k$

$\Leftrightarrow y = \frac{-2}{x^2 + 2k}$

Logo pela observação acima (*), sendo $g(x) = x$, $h'(y) = 2y$ serem contínuos, temos que todas as soluções da equação é:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y(x) = -\frac{2}{x^2+2k} \end{cases}, \quad k = \text{constante}.$$

ie temos uma família de todas as soluções da equação.

se procuramos por soluções que satisfaz a condição inicial $y(1)=0$. temos que a solução constante $y(x)=0$ é a única solução que satisfaz a condição.

se agora pedimos que $y(0)=1$, temos que a solução deve vir da família, assim que:

$$1 = \frac{-2}{0^2+2k} = \frac{-1}{k} \Longrightarrow \boxed{k=-1}$$ ie a única solução que satisfaz a condicional inicial $y(0)=1$ é a solução

$$y(x) = \frac{-2}{x^2-2}$$ que está definida em $x^2-2 \neq 0$ ie, $x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ ie no intervalo $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

<u>Exemplo ②</u>: Determine as soluções de $\frac{dy}{dx} = x(1-y^2)$.

<u>solução</u>: ela é de variaveis separaveis.

<u>Constantes</u>: procuramos as raizes de $1-y^2=0$, ie, $y^2=1$ ie, $y=\pm 1$. logo as soluções constants são $y(x)=1$ e, $y(x)=-1$.

<u>Não-constantes</u>: $\frac{dy}{1-y^2} = x\,dx \Longleftrightarrow \int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{x^2}{2}+k$, k = constante de integração.

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+y}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1-y} + \frac{1}{2}\int\frac{dy}{1+y} \Longrightarrow \int\frac{dy}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$ logo a solução $y=y(x)$ é dada implicitamente pela equação $$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{x^2}{2}+k$$ com k = constante.

observe que $y=y(x)$ deve ser tal que $\frac{1+y}{1-y}>0$, i.e,

$\left(1+y>0 \text{ e } 1-y>0\right)$ ou $\left(1+y<0 \text{ ,e, } 1-y<0\right)$

$(y>-1 \text{ ,e, } 1>y)$

$\emptyset$.

$(y<-1 \text{ e } 1<y)$

Logo $y=y(x)$ é tal que $y \in (-1,1)$.

b) Equação homogênea:

Aqui usaremos uma mudança de variável para simplificar a equação diferencial ordinária de 1ª ordem, e assim dar a solução.

Definição: uma equação homogênea têm a forma:

$$\frac{dy}{dx} = \hat{F}\left(\frac{y}{x}\right)$$

isto é, a equação $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ é homogênea se a função $F(x,y)$ não depende de x ~~ou~~ de y separadamente, mas somente da razão $\frac{x}{y}$ ou $\frac{y}{x}$.

Exemplo: 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$

2) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}\right) + \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)}$.

são equações homogêneas.

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+2xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ Não é homogênea.

Como solucionar a equação homogênea? ... Fazemos por substituição. Seja $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow$ equação

$\frac{dy}{dx} = \hat{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ fica: $\frac{dy}{dx} = \hat{F}(v)$. isto é:

$v + x\frac{dv}{dx} = \hat{F}(v)$. Equação de variável separável:

$x\frac{dv}{dx} = \hat{F}(v) - v \Rightarrow \frac{dv}{\hat{F}(v)-v} = \frac{dx}{x}$. Logo aplicamos integração e depois substituimos v por $\frac{y}{x}$, o que nos leva a solução da equação original.

Exemplo: Achar a solução da equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$

Solução: observe que a equação não é de variáveis separáveis. MAS:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Logo fazendo $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v(v+1)}{x}$$

Então as soluções constantes: vêm dados por $v(v+1) = 0 \Rightarrow v = 0$ e $v = -1 \Rightarrow$ isto é: $v(x) = 0$ e $v(x) = -1$ $\Rightarrow$ elas fornecem as soluções $y(x) = 0$, e, $y(x) = -x$.

Não-constantes: se $v \neq 0$, e, $v \neq -1$, então temos a equação $\frac{dv}{v(v+1)} = \frac{dx}{x}$, a qual é de variável separável.

$\int \frac{dv}{v(v+1)} = \ln|x| + k$, mas $\int \frac{dv}{v(v+1)} = \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v+1}$

$= \ln|v| - \ln|v+1|$. logo pegando $k = \ln|c|$ temos

$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right| = \ln|xc| \iff \ln\left|\frac{xc}{v}(v+1)\right| = 0$$

$\Rightarrow \frac{xc(v+1)}{v} = 1 \iff xc = \frac{v}{v+1}$.

Logo substituindo v pelo valor $\frac{y}{x}$, obtemos

$xc = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = \frac{y}{x}\frac{x}{y+x} = \frac{y}{y+x} \Rightarrow$ isto e':

$y = (y+x)xc \Rightarrow y = yxc + x^2c \Rightarrow y(1-xc) = x^2c$

isto e': $\quad y = \frac{x^2c}{1-xc}$.

observe que as soluções constantes $y=0$ e $y=-x$, ~~então~~ acontecem quando $c=0 \Rightarrow y=0$ e que a solução $y=-x$ e' obtida no limite $c \longrightarrow \pm\infty$.

<u>Exemplo ②</u>: Ache as soluções de $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

<u>solução</u>: observe que ela não e' de variáveis separáveis.

MAS: $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow v = \frac{y}{x} \rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$.

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v}$, isto e': $\cancel{x}\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$.

separando variáveis: $\frac{(1-v)}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow$ isto e':

$\frac{dv}{1+v^2} - \frac{v\,dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}$. Integrando fica:

$\operatorname{arctg} v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|x| + \ln|c|$. isto é:

$\operatorname{arctg} v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|xc|$ isto é:

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|xc| + \ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln\left(|xc|\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) \Rightarrow$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Assim as soluções da equação $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$, são dadas implicitamente pela equação $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Para conferir que y dada implicitamente pela equação anterior, devemos derivar implicitamente.