2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 31 E 32

OBJETIVOS: DISCUTIR FUNÇÕES DE GREEN COM ÊNFASE NA SUA NATUREZA COMO DISTRIBUIÇÕES E NA SUA EXPRESSÃO COMO CONVOLUÇÕES.

4. OPERADORES, FUNÇÕES DE GREEN E ANÁLISE COMPLEXA

4.1 MOTIVAÇÃO

- VAMOS DISCUTIR UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI), DE MODO QUE É CONVENIENTE RELEMBRARMOS ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE,

$$\boxed{\hat{f}(s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt} = \mathcal{L}[f(t)]$$

EM PARTICULAR, SUCESSIVAS INTEGRAÇÕES POR PARTES REVELAM QUE

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n \cdot \hat{f}(s) - s^{n-1} f^{(0)}(0) - s^{n-2} \cdot f^{(1)}(0) - \dots - s^0 \cdot f^{(n-1)}(0)$$

E UMA SIMPLES INVERSÃO DE ORDEM DE INTEGRAÇÃO REVELA QUE A CONVOLUÇÃO

NA TF, ERA $+\infty$!

CAUSALIDADE

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_0^t f(\xi)\, g(t-\xi)\, d\xi}$$

NA TF, ERA $-\infty$!

É TAL QUE

$$\boxed{\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right] = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s).}$$

O PVI ILUSTRATIVO É

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + c\,x(t) = f(t),$$

$$x(0) = 0 = \dot{x}(0).$$

APLICANDO A TL A AMBOS OS LADOS DA EDO, OBTEMOS

$$a\left[s^2\hat{x}(s) - s\,x(0) - \dot{x}(0)\right] + b\left[s\,\hat{x}(s) - x(0)\right] +$$
$$+ c.\hat{x}(s) = \hat{f}(s) \Rightarrow \hat{x}(s) = \frac{1}{as^2+bs+c} \cdot \hat{f}(s)$$

$x(0) = 0 = \dot{x}(0)$

$\hat{G}(s)$ <u>NÃO</u> DEPENDE DO FORÇAMENTO f

A <u>FUNÇÃO</u> <u>TRANSFERÊNCIA</u> $\hat{G}(s) \equiv \dfrac{1}{as^2+bs+c}$

PODE SER A TL DA <u>FUNÇÃO</u> <u>RESPOSTA</u> <u>IMPULSIVA</u> OU <u>FUNÇÃO</u> <u>DE</u> <u>GREEN</u>

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\hat{G}(s)\right]$$

QUE, PELA CONVOLUÇÃO, GERA SOLUÇÕES <u>PARTICULARES</u> DO PVI MEDIANTE A EXPRESSÃO

f <u>QUALQUER</u>

$$\boxed{x_p(t) = \int_0^t G(t-t').\,f(t')\,dt'}\,.$$

"AH, AS CONDIÇÕES INICIAIS AJUDARAM MUITO, ISSO NÃO É GERAL". É, SIM! CONDIÇÕES INICIAIS NÃO HOMOGÊNEAS SÃO "MELHOR MANEJADAS" POR EDO'S HOMOGÊNEAS, QUE "DISPÕEM" DE CONSTANTES DE INTEGRAÇÃO. ASSIM, NA VERDADE, DEVERÍAMOS TER ESCRITO NOSSO PVI COMO

$$\boxed{a\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + c\,x_p = f\ , \quad x_p(0) = 0 = \dot{x}_p(0)}\ ,$$

UM SUB-PROBLEMA CUJA SOLUÇÃO, COMBINADA À DE UM OUTRO PROBLEMA PARCIAL,

$$\boxed{a\ddot{x}_H + b\dot{x}_H + c.\,x_H = 0\ , \quad x_H(0) = x_0\ , \dot{x}_H(0) = x_1}$$

GERA A SOLUÇÃO DE UM PVI GERAL,

$$\boxed{a\ddot{x} + b\dot{x} + c\dot{x} = f\ , \ x(0) = x_0\ , \ \dot{x}(0) = x_1}\ ,$$

COM $\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t)}$.

POR QUE G(t) É UMA "FUNÇÃO RESPOSTA IMPULSIVA"? BEM, INFORMALMENTE, A TL DA DELTA DE DIRAC É

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t)\,dt = 1,$$

DE MODO QUE, SE O FORÇAMENTO FOR IMPULSIVO NO PVI ORIGINAL, $f(t)=\delta(t)$ EM $t=0$

EM

$$\boxed{L\left[x_p(t)\right] = f(t)},$$

ONDE $\boxed{L = a\dfrac{d^2}{dt^2} + b\dfrac{d}{dt} + c}$ É UM OPERADOR DIFERENCIAL,

$$\hat{x}_p(s) = \hat{G}(s)\,.\,\hat{f}(s) \rightarrow \hat{G}(s).$$

SIMBOLICAMENTE,

$$\boxed{L[G(t)] = \delta(t)},$$

EMBORA SEJA CONVENIENTE LOCALIZARMOS TEMPORALMENTE O IMPULSO

EM UM INSTANTE ARBITRÁRIO τ, O QUE LEVA A UMA RESPOSTA IMPULSIVA GERAL

$$\boxed{G(t,\tau)}$$

E À EQUAÇÃO

$$\boxed{L_t\left[G(t,\tau)\right]=\delta(t-\tau)},$$

ONDE $L_t=L$, O "ÍNDICE" t APENAS REFORÇA QUE O OPERADOR AGE SOBRE t, E NÃO SOBRE τ.

ABSTRATAMENTE, ESPERA-SE QUE O INVERSO DO OPERADOR DIFERENCIAL L, SE EXISTIR, SEJA ALGUM TIPO DE OPERADOR INTEGRAL. DE FATO, VIMOS QUE

$$L[x_p(t)]=f(t) \overset{?}{\Longrightarrow} x_p(t)=\int_0^t G(t-t')f(t')\,dt' \equiv L^{-1}[f(t)],$$

DE MODO QUE A FUNÇÃO DE GREEN É O NÚCLEO DE INTEGRAÇÃO DO OPERADOR (INTEGRAL) INVERSO DO OPERADOR DIFERENCIAL QUE CARACTERIZA UM SISTEMA.

NEM SEMPRE A FUNÇÃO DE GREEN SERÁ UM NÚCLEO DE CONVOLUÇÃO, COMO NESTE EXEMPLO: $G(t,\tau) \to G(t-\tau)$. MAS ESSE CASO É COMUM E IMPORTANTE, BEM COMO AQUELAS SITUAÇÕES EM QUE G SERÁ SIMÉTRICA: $G(t,\tau) = G(\tau,t)$. É CLARO QUE, EM GERAL, UMA FUNÇÃO DE GREEN DEVE SER ENTENDIDA COMO UMA DISTRIBUIÇÃO.

4.2 CONVOLUÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES

MESMO PARA FUNÇÕES USU-

AIS, NEM SEMPRE EXISTE UMA CONVO-LUÇÃO. ~~[illegible]~~ MESMO ASSIM, FELIZMENTE, É POSSÍVEL, SOB CONDIÇÕES BEM RAZOÁVEIS, ATÉ MESMO ESTABELECERMOS UM TEOREMA DE CONVOLUÇÃO PARA DISTRIBUIÇÕES!

(i) DADAS DUAS DISTRIBUIÇÕES, $S, T \in \mathcal{D}'$, SUA CONVOLUÇÃO $S * T$ É DEFINIDA POR

$$\boxed{\langle S * T, h \rangle \equiv \langle S(x)\,T(y), h(x+y) \rangle}$$

$\forall h \in \mathcal{D}$.

CONDIÇÕES <u>SUFICIENTES</u> DE EXISTÊNCIA:

(i) S E T AMBAS COM SUPORTE LIMITADO À ESQUERDA (OU À DIREITA, AMBAS).

OU

(ii) UMA DELAS COM SUPORTE COMPACTO (AMBOS OS LADOS)

□ MOTIVAÇÃO:

SE S E T FOSSEM DISTRIBUIÇÕES REGULARES, EXPRESSAS POR FLI'S $S(x)$ E $T(y)$, COM CONVOLUÇÃO $(S*T)(t)$,

$$\langle S*T, h\rangle =$$

$$= \int [(S*T)(t)]\, h(t)\, dt =$$

$$= \int \left[\int S(u)\, T(t-u)\, du \right] h(t)\, dt \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \iint [S(x)T(y)]\, h(x+y)\, dx\, dy \qquad \begin{cases} x = u \\ y = t-u \end{cases}$$

$$= \langle S(x)T(y), h(x+y)\rangle \quad \square$$

(ii) SE $S \in \mathcal{S}'$ FOR UMA DISTRIBUIÇÃO <u>TEMPERADA</u> E T TIVER SUPORTE COMPACTO, $S*T \in \mathcal{S}'$ E

$$\boxed{\mathcal{F}(S*T) = \tilde{S} \cdot \tilde{T}}.$$

E A INVERSÃO DE FOURIER?

SE $\tilde{S}.\tilde{T} \in \mathcal{D}'$ E $\tilde{S}$ FOR UMA DISTRIBUIÇÃO REGULAR ASSOCIADA A UMA FUNÇÃO C^∞,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\tilde{S}.\tilde{T}) = S * T}.$$