Complementos de Física Moderna
Bloco 3 - Aula 04

Ivã Gurgel (gurgel@usp.br)
Marcelo G. Munhoz (munhoz@if.usp.br)

Limitações da Teoria de Schroedinger

- Como descrever o comportamento dual da radiação eletromagnética? Como dar conta, por exemplo, da criação de fótons em um processo envolvendo radiação eletromagnética? Os fótons têm uma função de onda?

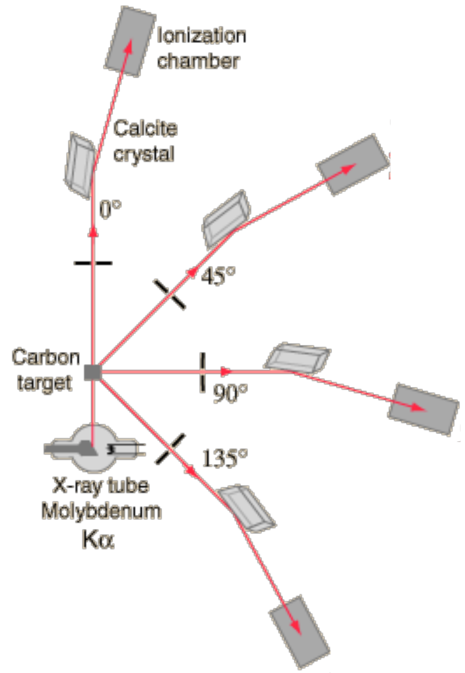
O experimento de Compton

- *A. H. Compton, Phys. Rev. 21, 483; 22, 409 (1923)*

- Compton fez incidir um feixe de raios-X com um comprimento de onda conhecido sobre uma amostra de carbono

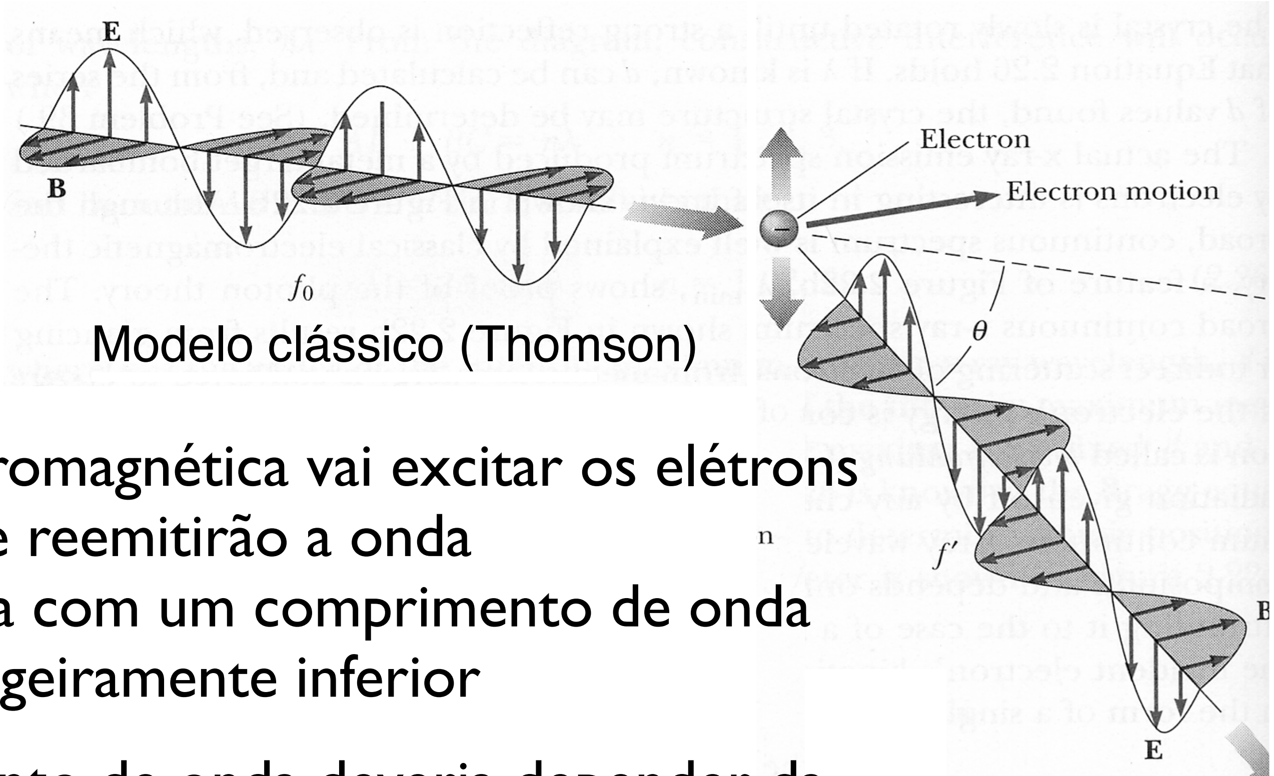
- Usando um cristal, ele mediu o comprimento de onda dos raios-X espalhados em 3 ângulos diferentes

- O resultado foi surpreendente!



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/HBASE/quantum/compton.html

Expectativa “clássica” do experimento



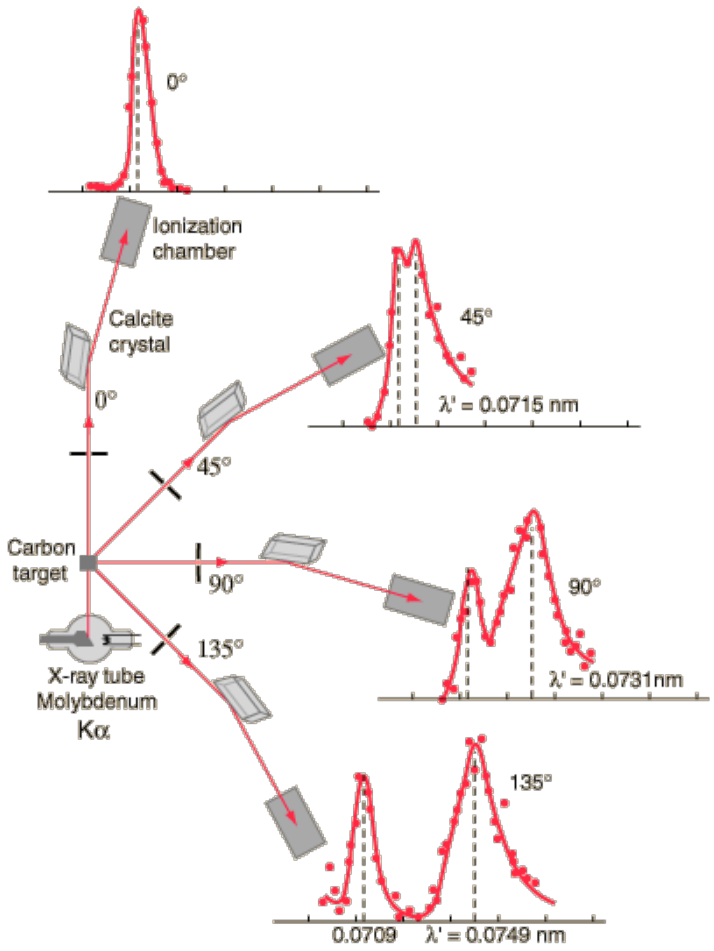
Modelo clássico (Thomson)

- Uma onda eletromagnética vai excitar os elétrons do material que reemitirão a onda eletromagnética com um comprimento de onda ou frequência ligeiramente inferior
- Esse comprimento de onda deveria depender da intensidade da radiação incidente e do tempo de exposição

O experimento de Compton

- Compton observou que não só o comprimento de onda não dependia da intensidade da radiação incidente e do tempo de exposição, como dependia do ângulo de espalhamento!

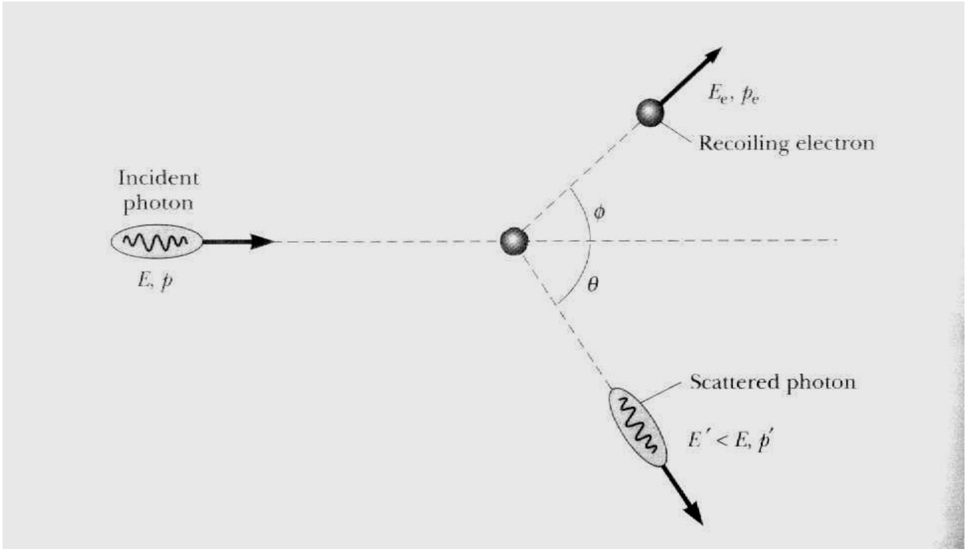
- Além disso, o espectro de radiação apresentava dois picos!



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/HBASE/quantum/compton.html

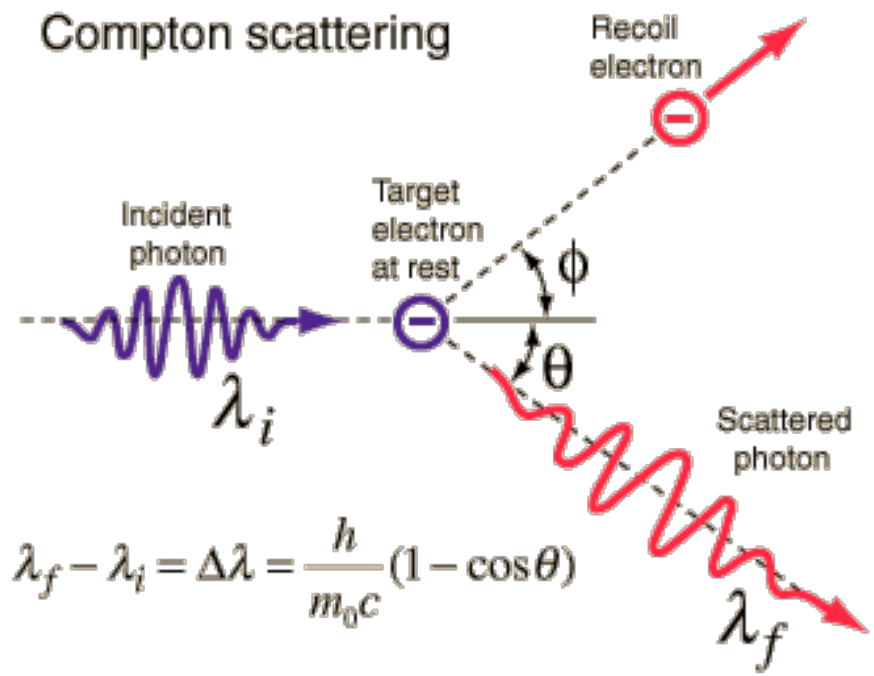
Como explicar essas observações?

- Utilizando a idéia de que os raios-X se comportam como partículas
- Supondo que uma "partícula" de radiação, com comprimento de onda λ_0, energia E_0 e momento p_0 incide sobre um elétron de massa m_e
- Esse elétron sofre um recuo, sendo emitido em um ângulo φ, com energia E_e e momento p_e
- A partícula de radiação, por sua vez, é emitida no ângulo θ, com energia E' e comprimento de onda λ'



Espalhamento Compton

- Usando apenas a idéia da dualidade onda-partícula da radiação eletromagnética e os princípios de conservação de energia e momento, podemos reproduzir os resultados obtidos por Compton



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/HBASE/quantum/compton.html

A natureza dual da radiação eletromagnética

- Compton escreveu em seu artigo:
  - *"A presente teoria depende essencialmente da suposição de que cada elétron que participa do processo espalha um quantum completo (fóton). Isto envolve também a hipótese de que os quanta de radiação vêm de direções definidas e são espalhados em direções definidas. O apoio experimental da teoria indica de forma bastante convincente que um quantum de radiação carrega consigo tanto momento como energia"*

Olhai a quantização do campo!

- Como podemos descrever a quantização (ou dualidade) da radiação eletromagnética?
- Os formalismos de Schroedinger e Dirac contemplam essa ideia?

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- No caso do Spin (aula anterior), podemos definir o operador:

$$S_+ \equiv \hbar|S_z;+\rangle\langle S_z;-|$$

- e o operador

$$S_- \equiv \hbar|S_z;-\rangle\langle S_z;+|$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Quando S_+ é aplicado no estado $|S_z; -\rangle$ tem-se:

$$S_+|S_z; -\rangle = \hbar|S_z; +\rangle\langle S_z; -|S_z; -\rangle = \hbar|S_z; +\rangle$$

- E quando aplicado em $|S_z; +\rangle$, tem-se:

$$S_+|S_z; +\rangle = \hbar|S_z; +\rangle\langle S_z; -|S_z; +\rangle = 0$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Quando S_- é aplicado no estado $|S_z; -\rangle$ tem-se:

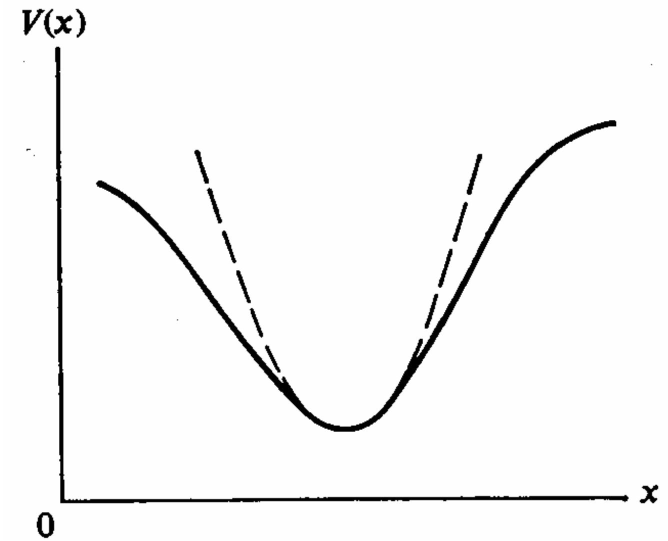
$$S_-|S_z; -\rangle = \hbar|S_z; -\rangle\langle S_z; +|S_z; -\rangle = 0$$

- E quando aplicado em $|S_z; +\rangle$, tem-se:

$$S_-|S_z; +\rangle = \hbar|S_z; -\rangle\langle S_z; +|S_z; +\rangle = \hbar|S_z; -\rangle$$

Oscilador Harmônico

- Para o oscilador harmônico, temos algo parecido.



- O oscilador harmônico é de extrema importância na física pois é um protótipo de qualquer sistema que envolva oscilações

- Para pequenas oscilações, normalmente, pode-se aproximar o potencial para: $V(x) = \dfrac{m\omega^2}{2}x^2$

Oscilador Harmônico

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + \frac{C}{2}x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

$$E_n = (n + 1/2)h\nu$$

$$\psi_n(x) = H_n[u(x)]e^{-u(x)^2/2}$$

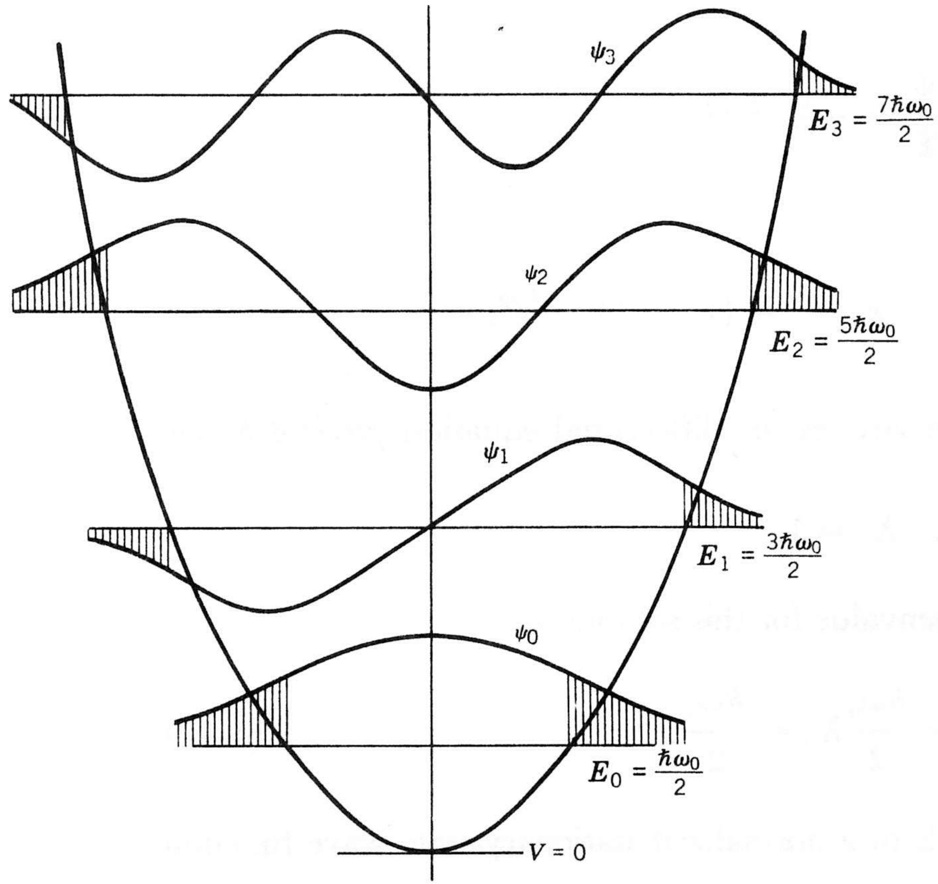
onde: $u(x) = \left[\frac{(Cm)^{1/4}}{\hbar^{1/2}}\right]x$

$$H_0[u(x)] = 1$$

$$H_1[u(x)] = 2u(x)$$

$$H_2[u(x)] = 4u(x)^2 - 2$$

$$H_3[u(x)] = 8u(x)^3 - 12u(x)$$



Oscilador Harmônico

- Lembrando que podemos escrever a Eq. de Schroedinger como:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

- cujo operador hamiltoniano ($\hat{H}$) será dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2, \text{onde } \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx} \text{ e } \hat{x} = x$$

- ou seja:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x) = E\psi(x)$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Para o oscilador harmônico, podemos definir os operadores:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- O operador $\hat{N}$ pode ser reescrito como:

$$\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

- Portanto:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Com isso, podemos interpretar o que seriam os auto-vetores e auto-valores desse operador $\hat{N}$.
- Seja:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

- Portanto:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N}|n\rangle + \frac{1}{2}|n\rangle\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \text{ e}$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Notando que

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^{\dagger}[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}$$

- e

$$[\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}$$

Operadores de Criação, Destruição e Contagem

- Tem-se:

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = ([\hat{N},\hat{a}^\dagger] + \hat{a}^\dagger\hat{N})|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$$

- e

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = ([\hat{N},\hat{a}] + \hat{a}\hat{N})|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$$

- Portanto, esses operadores aumentam ou diminuem o número quântico n

Campos Eletromagnéticos Clássicos

- Vamos agora lembrar como descrever uma onda eletromagnética segundo a física clássica

Equações de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Unificou efeitos elétricos e magnéticos
- Ondas eletromagnéticas tem o mesmo comportamento que a luz!

Potencial Vetor

- Podemos também representar esses campos pelo potencial vetor, cuja relação com os campos elétrico e magnético são:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \text{ e } \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

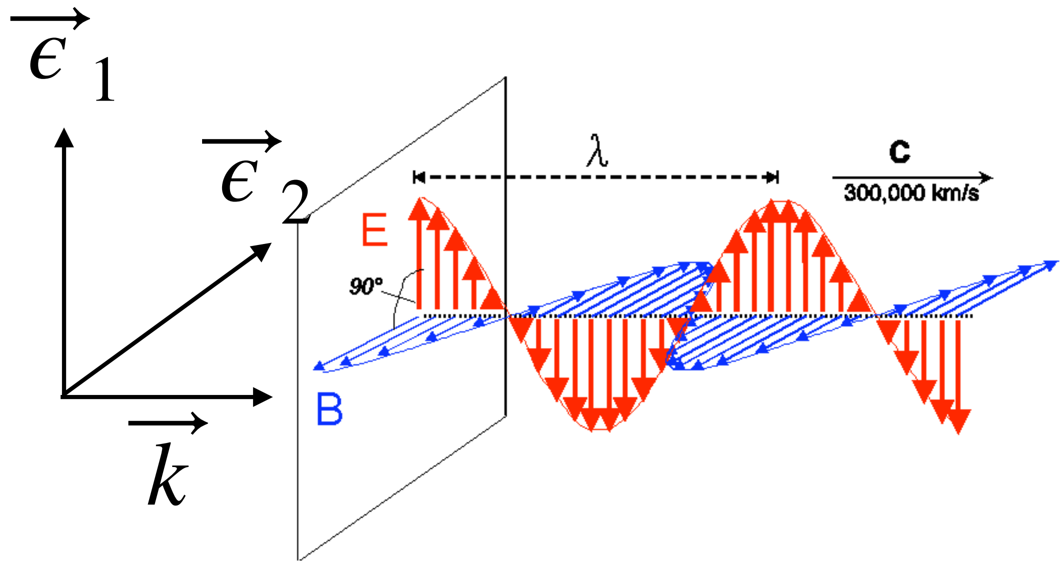
- Substituindo essas relações nas equações de Maxwell, temos:

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = 0$$

Ondas eletromagnéticas

- Essa equação tem como possível solução:

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} c_{k,\alpha}(t)\overrightarrow{\epsilon}_{\alpha} e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\vec{r})} + c^{*}_{k,\alpha}(t)\overrightarrow{\epsilon}_{\alpha} e^{-i(\overrightarrow{k}\cdot\vec{r})}$$



Energia das Ondas Eletromagnéticas

- É interessante notar o que acontece com a energia, ou hamiltoniano, das ondas eletromagnéticas com esta representação
- Sendo

$$H = \frac{1}{2}\int |\left(\overrightarrow{B}|^2 + \overrightarrow{E}|^2\right) d\vec{r}$$

- tem-se que:

$$H = \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} 2(\omega/c)^2 c^*_{k,\alpha}(t) c_{k,\alpha}(t)$$

Estados de Fótons

- Para realizarmos a quantização dessa onda eletromagnética, podemos usar o formalismo apresentado anteriormente
- Vamos definir estados quânticos representados pelo número de fótons presentes com um determinado momento ($\overrightarrow{k}$) e polarização ($\overrightarrow{\epsilon}_\alpha$), ou seja:

$$|n_{\overrightarrow{k}_1,\alpha_1}, n_{\overrightarrow{k}_2,\alpha_2}, \ldots\rangle$$

Estados de Fótons

- Partindo dessa ideia, podemos definir um estado com um fóton como: $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}|0\rangle$
- ou com dois fótons: $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_1,\alpha_1}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_2,\alpha_2}|0\rangle$
- ou com n fótons: $\prod_{\vec{k}_i,\alpha_i}^{n}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_i,\alpha_i}|0\rangle$

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

- Mas qual é a relação com os campos elétricos e magnéticos?
- Podemos reescrever o potencial como:

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} \hat{a}_{k,\alpha}(t)\overrightarrow{\epsilon}_{\alpha} e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\vec{r})} + \hat{a}^{\dagger}_{k,\alpha}(t)\overrightarrow{\epsilon}_{\alpha} e^{-i(\overrightarrow{k}\cdot\vec{r})}$$

- que corresponde ao campo quantizado!

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

- Observando agora a energia desse campo quantizado temos:

$$\hat{H} = \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} \hbar\omega/2 \left(\hat{a}^{\dagger}_{k,\alpha}(t)\hat{a}_{k,\alpha}(t) + \hat{a}_{k,\alpha}(t)\hat{a}^{\dagger}_{k,\alpha}(t) \right)$$

- que é igual a:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} \hbar\omega \left(\hat{N}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

- Portanto, o operador hamiltoniano agindo em um estado de fótons, resulta em:

$$\hat{H}|n_{\vec{k}_1,\alpha_1}, n_{\vec{k}_2,\alpha_2}, \ldots\rangle = \sum_i n_{\vec{k}_i,\alpha_i} \hbar\omega_i |n_{\vec{k}_1,\alpha_1}, n_{\vec{k}_2,\alpha_2}, \ldots\rangle$$

- que é a energia esperada da quantização da radiação eletromagnética

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

- Podemos fazer o mesmo para o momento
- Seja o vetor de Poynting, que é dado por:

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{2}\int \left| \left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} \right) d\vec{r}\right.$$

- que pode ser quantizado da mesma forma que a energia:

$$\hat{P} = \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} \hbar \overrightarrow{k} /2 \left(\hat{a}^{\dagger}_{k,\alpha}(t)\hat{a}_{k,\alpha}(t) + \hat{a}_{k,\alpha}(t)\hat{a}^{\dagger}_{k,\alpha}(t) \right)$$

Quantização Canônica do Campo Eletromagnético

- Resultando em:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \sum_{\overrightarrow{k}} \sum_{\alpha} \hbar \overrightarrow{k} \left(\hat{N}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

- que ao ser aplicado no estado de fótons

$$\hat{P} | n_{\overrightarrow{k}_{1},\alpha_1}, n_{\overrightarrow{k}_{2},\alpha_2}, \ldots \rangle = \sum_i n_{\overrightarrow{k}_{i},\alpha_i} \hbar \overrightarrow{k_i} | n_{\overrightarrow{k}_{1},\alpha_1}, n_{\overrightarrow{k}_{2},\alpha_2}, \ldots \rangle$$

- que é o momento esperado da quantização da radiação eletromagnética

Limitações da Teoria de Schroedinger

- Desta forma, criamos um formalismo que permite interpretar então os fótons como sendo as "unidades" ou quanta do campo eletromagnético
- A mesma ideia pode ser estendida para as partículas de matéria, como o elétron

Discussão da Aula

- Qual é o conhecimento básico de FMC necessário para os professores alcançarem a autonomia (ou superarem os obstáculos) para abordar esse tema no EM?