Lembrando, ex. pag 13, 27/10

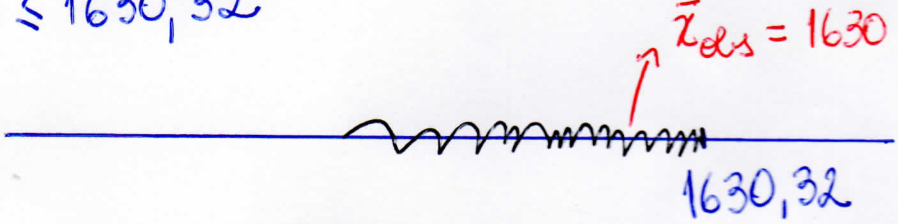
Tempo de vida de lâmpadas $X \sim N(\mu, 120^2)$

$H_0: \mu = 1650$ afirmação do fabricante

$H_a: \mu < 1650$

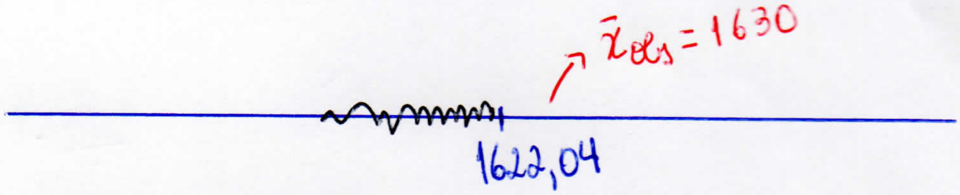
$\alpha = 0,05$ RC: $\bar{X} \leq 1630,32$

$n = 100$

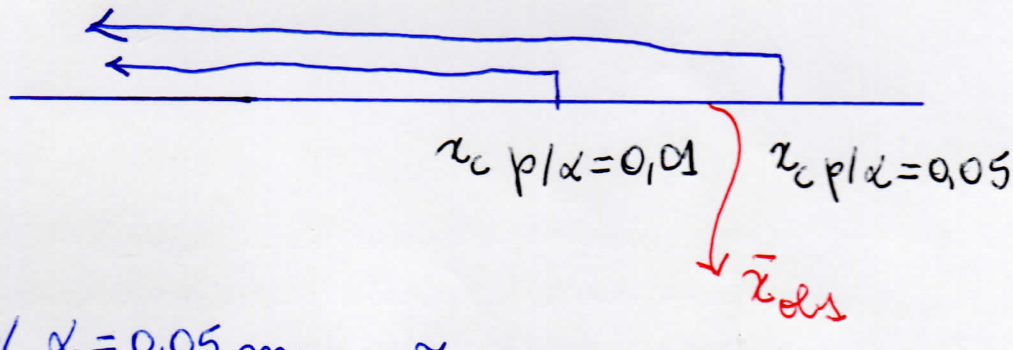


$\bar{x}_{obs} = 1630 \in RC$ para $\alpha = 0,05$

Para $\alpha = 0,01$ a RC seria $\bar{X} \leq 1622,04$



$\bar{x}_{obs} = 1630 \notin RC$ para $\alpha = 0,01$



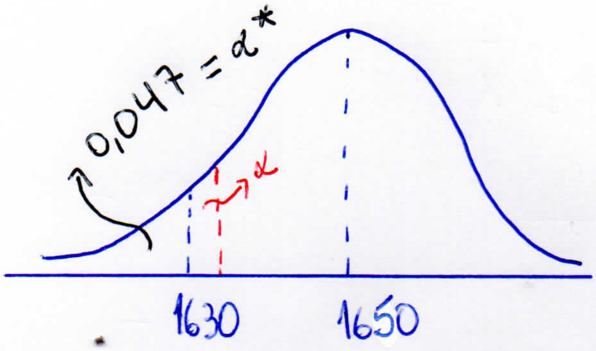
No caso, rej. p/ $\alpha = 0,05$ mas não para $\alpha = 0,01$.

Se rejeitasse para $\alpha = 0,01$ rejeitaria para $\alpha = 0,05$

Obtido $\bar{x}_{obs} = 1630$, para que valores de α rejeitaríamos H_0?

Se adotássemos a RC: $\bar{X} \leq 1630$ teríamos

$$\alpha^* = P(\bar{X} \leq 1630 \mid \mu = 1650) = P\left(Z \leq \frac{1630-1650}{12}\right) =$$



$$= P(Z \leq -1{,}666) = 0{,}047$$

$$N\left(1650, \frac{120^2}{100}\right)$$

Para todo $\alpha > \alpha^*$, $\bar{x}_{obs} \in RC$ (figura), rejeitaríamos H_0.

$\therefore$ $\alpha^* = P(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \mid H_0 \text{ verd})$ é o menor α para o qual $\bar{x}_{obs} \in RC$ $\therefore$ é o menor α para o qual rejeitaríamos H_0 para o valor $\bar{x}_{obs}$.

Regra de decisão com base em α^*:

Rejeita-se H_0 para $\alpha \geq \alpha^*$.

O valor α^* é denominado nível descritivo do teste.

α^* baixo, p. ex., $\alpha^* = 0{,}002 \Rightarrow$ rej. p/ $\alpha = 0{,}01$
$\alpha = 0{,}04$
$\alpha = 0{,}05$
etc

$\alpha^* = 0{,}04 \Rightarrow$ rej p/ $\alpha = 0{,}05$ mas não p/ $\alpha = 0{,}01$

$\alpha^* = 0{,}15 \Rightarrow$ não rej. p/ α usuais.

Obs:

- O valor de α^* é muitas vezes denotado na literatura por p (p-value)

- Este valor nos fornece mais informação sobre a "intensidade" com a qual rejeitamos ou não rejeitamos H_0.

- Bussab e Morettin, pag 350

Escala de Significância de Fisher

α^*	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
evidência contra H_0	marginal	moderada	substancial	forte	muito forte	fortíssima

De modo geral

Teste unicaudal à esquerda

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu < \mu_0$

RC: $\bar{X} \leq x_c$

$\alpha^* = P(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \mid \mu = \mu_0)$

Teste unicaudal à direita

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu > \mu_0$

RC: $\bar{X} \geq x_c$

$\alpha^* = P(\bar{X} \geq \bar{x}_{obs} \mid \mu = \mu_0)$

Teste bicaudal

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$

RC: $\bar{X} \leq x_{c_1}$ ou $\bar{X} \geq x_{c_2}$

Se $\bar{x}_{obs} < \mu_0$, $\alpha^* = 2P(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \mid \mu = \mu_0)$

Se $\bar{x}_{obs} > \mu_0$, $\alpha^* = 2P(\bar{X} \geq \bar{x}_{obs} \mid \mu = \mu_0)$

Exemplo Magalhães e Lima pag 279

Uma associação de defesa do consumidor desconfia que as embalagens de 450 g de um tipo de biscoito estão abaixo do peso especificado.
Para verificar tal afirmação, foram coletados 80 pacotes, obtendo-se peso médio de 447 g. Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo normal com desvio padrão de 10 g, qual é a conclusão com base no nível descritivo?

X - peso dos pacotes $\quad X \sim N(\mu, 10^2)$

$H_0: \mu = 450 \qquad RC: \bar{X} \leq x_{c_1}$

$H_a: \mu < 450 \qquad n = 80 \qquad \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100}{80}\right)$

$\bar{x}_{obs} = 447$

$\alpha^* = P(\bar{X} \leq \bar{x}_{obs} \mid H_0 \text{ é verd.}) = P(\bar{X} \leq 447 \mid \mu = 450)$

$= P\left(Z \leq \frac{447-450}{10/\sqrt{80}}\right) = P(Z \leq -2,68) = 0,0037$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\bar{X} \sim N\left(450, \frac{100}{80}\right) \qquad$ baixo

Rejeitamos H_0 para $\alpha \geq 0,0037$ (rej H_0 p/ $\alpha = 0,01$, 0,05, etc)

Interpretações adicionais sobre o nível descritivo

- Fornecer α^* (p-valor) é mais informativo sobre a conclusão de um teste.

- No exemplo, $\alpha^* = 0{,}0037$ é a probabilidade de obtermos $\bar{X} \leq \bar{x}_{obs}$ se H_0 fosse verdadeira.

Ou seja, se H_0 fosse verdadeira, a prob. de obtermos $\bar{X}$ tão extremo ou mais que o observado (≤ 447) seria baixa ($= 0{,}0037$). Pouco provável, rejeitamos H_0.

Ex 8.8 - pag 281 - Magalhães e Lima

X - Tempo de reação a um estímulo de cobaias submetidas a uma substância em segundos

$X \sim N(\mu, 2^2)$

$H_0: \mu = 8$ (tempo médio de reação igual às não submetidas ao estímulo)

$H_a: \mu \neq 8$

$n = 10 \quad \bar{x}_{obs} = 9{,}1$

RC para $\alpha = 0{,}06 \quad \bar{X} \leq 6{,}8$ ou $\bar{X} \geqslant 9{,}2$

$\bar{x}_{obs} \notin RC$, não rejeitamos H_0.

Cálculo de α^*

$\bar{x}_{obs} > 8 \implies \alpha^* = 2P(\bar{X} \geqslant 9{,}1 \mid \mu = 8) =$

$\bar{X} \sim N\left(8, \frac{4}{10}\right)$

$$= 2P\left(Z \geqslant \frac{9{,}1-8}{2/\sqrt{10}}\right) = 2P(Z \geqslant 1{,}74) = 2 \cdot 0{,}0409 = 0{,}0818$$

Rejeitamos H_0 para $\alpha \geqslant \alpha^*$

Portanto, não rejeitaríamos H_0 para $\alpha = 0{,}05,\ 0{,}06,\ 0{,}01$.

Rejeitaríamos para $\alpha = 0{,}10$.

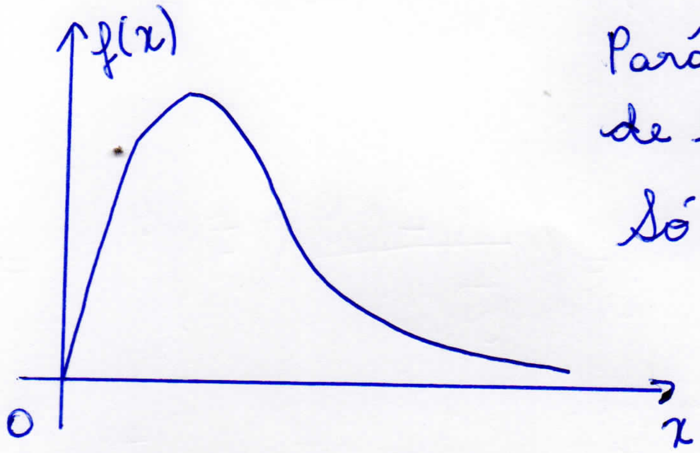
Testes Qui-Quadrado   Seção 8.5   Magalhães e Lima

a) Teste Qui-Quadrado de Aderência

b) Teste Qui-Quadrado de Independência

c) Teste Qui-Quadrado de Homogeneidade

Distribuição Qui-Quadrado



Parâmetro - número de graus de liberdade r inteiro, $r \geq 1$

Só assume valores positivos.

Está tabelada

(pag 373)

Seja X uma variável aleatória discreta ou contínua

Tomada uma amostra aleatória de n observações dessa distribuição, deseja-se verificar se X segue determinado modelo probabilístico.

Para a execução do teste, os dados amostrais são divididos em K categorias e constrói-se a tabela de frequências:

Categoria	1	2	3	...	K
freq. observada	o_1	o_2	o_3	...	o_K

Com $\sum_{i=1}^{K} o_i = n$

Constrói-se ainda a tabela das frequências esperadas sob a hipótese de que X segue o modelo proposto

Categoria	1	2	3	...	K
freq. esperada	e_1	e_2	e_3	...	e_K

H_0: X segue o modelo proposto

H_a: X não segue o modelo proposto

Estatística de Teste:

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Sob H_0, para n grande $Q^2 \overset{a}{\sim} \chi^2_{K-1}$

(distribuição qui-quadrado com $K-1$ g l)

Grandes valores de Q^2 nos levam à rejeição de H_0:

— Indicam $o_i - e_i$ alto (observado muito diferente do esperado se H_0 fosse verdadeira)

— Pondera-se por e_i, pois se o_i e e_i tendem a ser de alta amplitude, $o_i - e_i$ tende a ser alto, mesmo havendo concordância com o modelo.

— A aproximação pela distribuição χ^2 exige que $e_i > 5$, $i = 1, 2 \ldots K$.

Caso isso não aconteça, sugere-se juntar categorias similares.

Região Crítica:

Rejeita-se H_0 se $Q^2 \geq a$, a sendo determinado da tabela da distribuição Qui-Quadrado com $K-1$ graus de liberdade de modo que

$$P(\chi^2_{K-1} \geq a) = \alpha$$

χ^2_{K-1} - variável aleatória com distribuição Qui-quadrado com $K-1$ graus de liberdade

α - nível de significância do teste.

Tabela da distribuição Qui-Quadrado

Pag 373 Apêndice A - Magalhães e Lima

p	99%	...	10%	5%
			⋮	⋮
8	- - -	- - -	13,36	
gl 10	. . .	. . .	15,99	18,31

$$P(\chi^2 \geq a) = p$$

$$P(\chi^2_8 \geq 13{,}36) = 0{,}10$$

$$P(\chi^2_{10} \geq 18{,}31) = 0{,}05$$

$$P(\chi^2_{10} \geq 15{,}99) = 0{,}10$$

Exemplo

Deseja-se verificar se o número de acidentes em uma estrada é uniformemente distribuído nos sete dias da semana. O número de acidentes observados para cada dia de uma semana escolhida aleatoriamente foram

Dia	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sab	Dom	
Nº de acidentes	20	10	10	15	30	20	35	140

$p_i = P(\text{acidente no } i\text{-ésimo dia} \mid \text{ocorreu acidente})$

$H_0: p_i = \frac{1}{7} \quad i = 1, 2, \dots 7$

$H_a: p_i \neq \frac{1}{7}$ para pelo menos um valor de i ($\Rightarrow$ para pelo menos dois valores de i)

Frequências Esperadas:

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = 140 \times \frac{1}{7} = 20$$

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(15-20)^2}{20} + \frac{(30-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(35-20)^2}{20} =$$

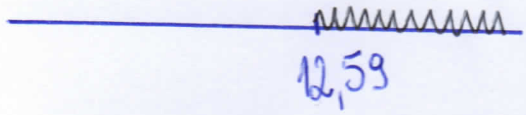
$= 0 + 5 + 5 + 1{,}25 + 5 + 0 + 11{,}25 = 27{,}5$

$K = 7 \qquad gl = K - 1 = 6 \qquad$ para $\alpha = 0{,}05 \qquad a = 12{,}59$

	5%
gl	
6	12,59

RC : $Q^2 \geq 12{,}59$

$Q^2_{obs} = 27{,}5 \in RC$



Rejeita-se H_0. Conclui-se ao nível de significância 0,05 que não há equi-distribuição do nº de acidentes nos sete dias da semana.

O nível descritivo seria calculado como

$$P(\chi^2_{K-1} \geq Q^2_{obs}) = P(\chi^2_6 \geq 27{,}5) = P$$

A tabela da distribuição Qui-Quadrado não possibilita o cálculo do nível descritivo.

Uma possibilidade é utilizar o pacote R.

Distribuições → Distribuições Contínuas → Distribuição Qui-Quadrado → Probabilidade da Qui-Quadrado → Cauda superior

inserir 27,5 e $gl = 6$ obtem-se $P = 0{,}0001 < \alpha$.

$P < \alpha$, rejeita-se H_0.