MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Sistemas lineares de controle
Controlabilidade de Saída[1]

Depto. Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
São Paulo – SP

[1] K. Ogata [Seção 9.6].

Neste momento **temos** discutido os conceitos de controlabilidade e observabilidade de sistemas de controle lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases} \qquad (*)$$

onde $x(t)$ é um vetor de **estado** $n \times 1$; $u(t)$ vetor de **controle** $r \times 1$; $y(t)$ vetor de **saída** $m \times 1$; $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

- Inicialmente tratamos controlabilidade de estado e observabilidade de sistemas **autônomos**, ie. assumindo que as funções matriciais A, B, C e D são constantes.
- Nesta aula veremos controlabilidade de **saída** e assim do sistema de controle.

Controlabilidade

- Dizemos que o sistema $(*)$ é de **saída** controlável em $[t_0, t_1]$, se for possível, por meio de um **vetor** de controle admissível u, transferir o sistema de qualquer saída inicial $y(t_0) \in \mathbb{R}^m$ para qualquer outra saída **final** $y(t_1) \in \mathbb{R}^m$.
- Se o sistema for de saída controlável para **todo** intervalo finito $[t_0, t_1]$, dizemos que o sistema é de saída **completamente** controlável.

Tais conceitos foram introduzidos por **Kalman** e tem um papel importante no projeto de sistemas. De fato, a controlabilidade e observabilidade de um sistema podem ditar a existência de uma solução **completa** para o projeto validando sua execução.

Teorema

Considere o seguinte sistema de **controle**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ \quad y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad (S)$$

com estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, controle $u(t) \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, saída $y(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ $(m \leq n)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrizes constantes. Então (S) é de **saída controlável**, se e somente se, o **posto** da matriz $m \times nr$

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

é m. Assim, o sistema de estado é de saída controlável se e só se é de saída **completamente** controlável.

- Lembramos que *posto* de uma matriz corresponde ao **número** de linhas ou colunas **linearmente** independentes dela.
- Note que a **condição** de controlabilidade não depende do intervalo $[t_0, t_1]$. Por isso temos que os conceitos de controlabilidade e controlabilidade completa neste caso são **equivalentes**.

Dem. Inicialmente **notamos** que o sistema de estado (S) é de saída controlável em $[t_0, t_1]$ se e só se o sistema

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = e^{-A(t-t_0)} B\, u(t) \\ \quad w(t) = C\, z(t) \end{cases} \tag{1}$$

é de saída **controlável** em $[t_0, t_1]$. Com efeito, temos que as soluções $x(t)$ e $z(t)$ de (S) e (1) respectivamente, se relacionam pela **expressão**

$$z(t) = e^{-A(t-t_0)} x(t). \tag{2}$$

Logo, $z(t_1) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)} B\, u(s)\, ds$ se e somente se

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)} z(t_1) = e^{A(t_1-t_0)} \left(z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)} B\, u(s)\, ds \right) \\ &= e^{A(t_1-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)} B\, u(s)\, ds \end{aligned}$$

a solução de estado de (S) com condição inicial $x(t_0) = z(t_0)$ em $t = t_1$. **Assim**, $y(t) = C\, x(t)$ é saída de (S), se é só se, $w(t) = C\, z(t)$ é saída de (1).

Prova do teorema

- Assim, existe controle u cuja saída $w(t)$ **evolui** $w(t_0)$ a $w(t_1)$, se e só se, para o **mesmo** u, a saída $y(t)$ associada evolui $y(t_0) = w(t_0)$ a $C\,e^{A(t_1-t_0)}z(t_1)$ com $e^{A(t_1-t_0)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertível.
- Então, (S) é de **saída** controlável em $[t_0, t_1]$ se e só se (1) também o **é**.

Controlabilidade de saída ao zero

Note que (1) é de saída controlável em $[t_0, t_1]$ se e só se existe controle u tal que (1) evolui $w(t_0) \in \mathbb{R}^m$ à **origem** $w(t_1) = 0$. Assim, devido a (2), temos que (S) é de saída controlável, se e só se evolui qualquer saída inicial $y(t_0)$ à **origem**.

A **ida** é clara. Basta verificarmos a volta. Suponha então que (1) evolui qualquer saída inicial à origem em $[t_0, t_1]$. Em **particular**, (1) evolui $w(t_0) - w(t_1) = C\,(z(t_0) - z(t_1))$ à origem. Assim, **existe** controle u tal que

$$0 = C\left(z(t_0) - z(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)}B\,u(s)\,ds\right)$$

$$\Rightarrow \quad C\,z(t_1) = C\left(z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{-A(s-t_0)}B\,u(s)\,ds\right).$$

- Desta forma, podemos **supor**, sem perda de generalidade, que (S) é de saída controlável, se e só se, evolui qualquer saída inicial $y(t_0)$ à origem.

Suponha então, que para qualquer **saída** $y(t_0) = C\,x(t_0) \in \mathbb{R}^m$, existe $u(t)$ tal que

$$0 = C\left(e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\,u(s)\,ds\right)$$

$$\iff \quad C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) = -C\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\,u(s)\,ds = -C\int_0^{t_1-t_0} e^{As}B\,u(t_1-s)\,ds.$$

Agora, pelo Teorema de **Cayley-Hamilton** existem funções $\alpha_k(t)$ tais que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k. \tag{3}$$

Daí,

$$-C\int_0^{t_1-t_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(s)A^k\right)B\,u(t_1-s)\,ds = -C\sum_{k=0}^{n-1}A^k\,B\int_0^{t_1-t_0}\alpha_k(s)\,u(t_1-s)\,ds$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} C\,A^k\,B\,\beta_k \quad \textbf{com} \quad \beta_k = \int_0^{t_1-t_0}\alpha_k(s)\,u(t_1-s)\,ds \in \mathbb{R}^{r\times 1}.$$

Portanto, existem **vetores** $\beta_k \in \mathbb{R}^{r\times 1}$ tais que

$$\begin{aligned} C\, e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} C\, A^k\, B\, \beta_k \\ &= -\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $y(t_0) = C\, e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ é arbitrário **concluímos** que o posto de

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times rn}$$

deve ser m provando a **ida** do Teorema.

Vejamos agora a **volta**. Suponha $\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}$ de posto m. Inicialmente veremos que a matriz $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ abaixo é invertível

$$W = \int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}C'\,ds.$$

Para tanto, seja x um vetor no **núcleo** de W. Então

$$\begin{aligned} 0 &= x'Wx = x'\left(\int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}C'\,ds\right)x \\ &= \int_{t_0}^{t_1} x'Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}C'x\,ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B'e^{A'(t_1-s)}C'x\|^2\,ds \end{aligned}$$

que nos dá

$$\|B'e^{A'(t_1-s)}C'x\| = 0 \quad \forall s \in [t_0, t_1]$$

pela **continuidade** da função exponencial.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= B'\left(I + A'(t_1 - s) + \frac{A'^2}{2}(t_1 - s)^2 + \ldots + \frac{A'^k}{k!}(t_1 - s)^k + \ldots\right) C'x \\ &= B'C'x + B'A'C'x(t_1 - s) + \frac{B'A'^2C'x}{2}(t_1 - s)^2 + \ldots + \frac{B'A'^kC'x}{k!}(t_1 - s)^k + \ldots \end{aligned}$$

para todo $s \in [t_0, t_1]$. Logo

$$0 = B'C'x = B'A'C'x = B'A'^2C'x = \ldots = B'A'^{n-1}C'x$$

e assim o vetor x **pertence** ao núcleo da matriz

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}'.$$

Como $\begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}$ possui posto m, $Q = \begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}'$ também é de **posto** m. Assim, como

$$m = \dim \mathbb{R}^m = \dim \text{Imagem}(Q) + \dim \text{Núcleo}(Q)$$

obtemos que $\dim \text{Núcleo}(Q) = 0$ que implica $x = 0$. Desta forma podemos concluir que a matriz W é **invertível**.

Agora vamos concluir que o sistema (S) é de **saída** controlável. Para tanto, vamos definir **um** controle u que satisfaça a equação

$$C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) = -C\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\,u(s)\,ds.$$

Tomamos

$$u(t) = -B'e^{A'(t_1-t)}\,C'\,W^{-1}\,C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$

onde $W = \int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}C'\,ds$. Então

$$\begin{aligned}
-C\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\,u(s)\,ds &= \int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}\,C'\,W^{-1}\,C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)\,ds \\
&= \left(\int_{t_0}^{t_1} Ce^{A(t_1-s)}BB'e^{A'(t_1-s)}C'\,ds\right)W^{-1}\,C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) \\
&= W\,W^{-1}\,C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) \\
&= C\,e^{A(t_1-t_0)}x(t_0).
\end{aligned}$$

$\square$

a) Note que a **prova** do teorema exibe um controle u que executa a operação desejada.

b) O resultado pode ser **estendido** ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \tag{4}$$

com $D \in \mathbb{R}^{m\times r}$ constante.

Exercício

Mostre que o sistema de estado (4) é de saída controlável em $[t_0, t_1]$, se só se, a matriz

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B & D \end{bmatrix}$$

de tamanho $m \times (n+1)r$ possui posto m.

Segunda lei de Newton

Seja $x(t)$ a **posição** de um corpo num instante t sujeito a um **força** f. Se o corpo possui massa m, então temos

$$m\,\ddot{x}(t) = f(t)$$

- x é a **saída** do sistema e f pode ser visto como **controle**. Se $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$ obtemos o seguinte sistema de controle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} f \,.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- A equação de estado deste sistema é controlável. **Vejamos** se sua saída também é.

Pelo **teorema** o sistema será de saída controlável se e só se o **posto** da matriz 1×2

$$\begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

é 1. **Como**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \text{ e } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} [CB \quad CAB] &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que é uma **matriz** de posto 1 implicando que o sistema é de **saída** controlável.