# Lógica
# Aula 16

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?
- $P(t_1, ..., t_n)$ é T ou F dependendo da tupla de argumentos!

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?
- $P(t_1, ..., t_n)$ é T ou F dependendo da tupla de argumentos!
- Mas e os quantificadores?

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?
- $P(t_1, ..., t_n)$ é T ou F dependendo da tupla de argumentos!
- Mas e os quantificadores?
- Exemplo: $\exists y \forall x R(x, y)$ vs. $\forall x \exists y R(x, y)$

## Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?
- $P(t_1, ..., t_n)$ é T ou F dependendo da tupla de argumentos!
- Mas e os quantificadores?
- Exemplo: $\exists y \forall x R(x, y)$ vs. $\forall x \exists y R(x, y)$

# Semântica da LPO

Como interpretar fórmulas da LPO?

- Atribuir T ou F às fórmulas atômicas?
- $P(t_1, ..., t_n)$ é T ou F dependendo da tupla de argumentos!
- Mas e os quantificadores?
- Exemplo: $\exists y \forall x R(x, y)$ vs. $\forall x \exists y R(x, y)$
  ($\mathbb{Z}$ e $R(x, y)$: "x é menor ou igual a y")

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?

## Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?

## Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

Por exemplo: universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é par"

## Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

Por exemplo: universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é par"
ou universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é negativo"

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

Por exemplo: universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é par"
ou universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é negativo"
ou universo $=$ frutas; $P(x) =$ "x nasce em árvore"

# Modelos

Na lógica proposicional: valorações ($2^n$ possibilidades)

$\exists x P(x)$:

- O que é $x$?
- Precisamos definir o *domínio de discurso* ou *universo de valores*.
- O que é $P(x)$?
- Precisamos atribuir um significado ao predicado.

Por exemplo: universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é par"
ou universo $= \mathbb{N}$; $P(x) =$ "x é negativo"
ou universo $=$ frutas; $P(x) =$ "x nasce em árvore"
ou universo $=$ frutas; $P(x) =$ "x é azul"

# Modelos - definição

Sejam $\mathcal{F}$ os símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicado.
Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é dado por:

1. Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$;

# Modelos - definição

Sejam $\mathcal{F}$ os símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicado.
Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é dado por:

1. Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$;
2. Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, um elemento $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$;

# Modelos - definição

Sejam $\mathcal{F}$ os símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicado.
Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é dado por:

1. Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$;
2. Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, um elemento $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$;
3. Para cada $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n$, uma função $f : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$;

# Modelos - definição

Sejam $\mathcal{F}$ os símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicado.
Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é dado por:

1. Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$;
2. Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, um elemento $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$;
3. Para cada $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n$, uma função $f : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$;
4. Para cada $P \in \mathcal{P}$ de aridade $n$, um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{A}^n$.

# Modelos - exemplo

$\mathcal{F} = \{e, .\}$, onde $e$ tem aridade 0 e . tem aridade 2.
$\mathcal{P} = \{\leq\}$, onde $\leq$ tem aridade 2.

# Modelos - exemplo

$\mathcal{F} = \{e, .\}$, onde $e$ tem aridade 0 e . tem aridade 2.
$\mathcal{P} = \{\leq\}$, onde $\leq$ tem aridade 2.
$\mathcal{M}_1$:

- $\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres
- $e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia $(\epsilon)$
- $.^{\mathcal{M}}$: concatenação $(.^{\mathcal{M}}(a, b) = ab)$
- $\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a, b) \in \mathcal{A}^2 | a \text{ é prefixo de } b\}$

# Modelos - exemplo

$\mathcal{F} = \{e, .\}$, onde $e$ tem aridade 0 e . tem aridade 2.
$\mathcal{P} = \{\leq\}$, onde $\leq$ tem aridade 2.
$\mathcal{M}_2$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$
- $e^{\mathcal{M}}$: 1
- $.^{\mathcal{M}}$: multiplicação
- $\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

# Exemplo 1

$$\forall x((x \leq x.e) \wedge (x.e \leq x))$$

# Exemplo 1

$$\forall x((x \leq x.e) \land (x.e \leq x))$$

$\mathcal{M}_1$:

- $\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres
- $e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia ($\epsilon$)
- $.^{\mathcal{M}}$: concatenação ($.^{\mathcal{M}}(a, b) = ab$)
- $\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a, b) \in \mathcal{A}^2 | a$ é prefixo de $b\}$

# Exemplo 1

$$\forall x((x \leq x.e) \wedge (x.e \leq x))$$

$\mathcal{M}_2$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$
- $e^{\mathcal{M}}$: 1
- $.^{\mathcal{M}}$: multiplicação
- $\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

# Exemplo 2

$$\exists y \forall x (y \leq x)$$

$$\forall x \exists y (y \leq x \land x \neq y)$$

# Exemplo 2

$$\exists y \forall x (y \leq x)$$

$$\forall x \exists y (y \leq x \wedge x \neq y)$$

$\mathcal{M}_1$:

- $\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres
- $e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia ($\epsilon$)
- $.^{\mathcal{M}}$: concatenação ($.^{\mathcal{M}}(a, b) = ab$)
- $\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a, b) \in \mathcal{A}^2 | a \text{ é prefixo de } b\}$

# Exemplo 2

$$\exists y \forall x (y \leq x)$$

$$\forall x \exists y (y \leq x \land x \neq y)$$

$\mathcal{M}_2$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$
- $e^{\mathcal{M}}$: 1
- $.^{\mathcal{M}}$: multiplicação
- $\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

# Exemplo 3

$$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \rightarrow x.z \leq y.z)$$

# Exemplo 3

$$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \rightarrow x.z \leq y.z)$$

$\mathcal{M}_1$:

- $\mathcal{A}$: conjunto de cadeias de caracteres
- $e^{\mathcal{M}}$: cadeia vazia ($\epsilon$)
- $.^{\mathcal{M}}$: concatenação ($.^{\mathcal{M}}(a, b) = ab$)
- $\leq^{\mathcal{M}}$: $\{(a, b) \in \mathcal{A}^2 | a \text{ é prefixo de } b\}$

# Exemplo 3

$$\forall x \forall y \forall z (x \leq y \to x.z \leq y.z)$$

$\mathcal{M}_2$:

- $\mathcal{A}$: $\mathbb{N}$
- $e^{\mathcal{M}}$: 1
- $.^{\mathcal{M}}$: multiplicação
- $\leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

# Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$

# Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$
- $\|c\|^{\mathcal{M},a} = c^{\mathcal{M}}$

# Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$
- $\|c\|^{\mathcal{M},a} = c^{\mathcal{M}}$
- Se $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$ são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $\|f(t_1, t_2, ..., t_n)\|^{\mathcal{M},a} = f^{\mathcal{M}}(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a})$.

# Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$

## Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$

# Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, \ldots, \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$

# Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$

# Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $a$ uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \rightarrow \psi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$

# Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

## Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x \varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

## Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x \varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

## Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x\varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x\varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

OBS.: Se a fórmula não tem variáveis livres, $a$ é irrelevante.

# Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

## Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$

# Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$
- $maria^{\mathcal{M}} = a$

# Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$
- $maria^{\mathcal{M}} = a$
- $ama^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

# Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$
- $maria^{\mathcal{M}} = a$
- $ama^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$$\mathcal{M} \models \forall x \forall y (ama(x, maria) \wedge ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, maria))$$

# Exemplo

$\mathcal{F} = \{maria\}$, onde *maria* tem aridade 0.
$\mathcal{P} = \{ama\}$, onde *ama* tem aridade 2.

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$
- $maria^{\mathcal{M}} = a$
- $ama^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$$\mathcal{M} \models \forall x \forall y (ama(x, maria) \wedge ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, maria))$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{M}, a \models \forall x \forall y (ama(x, maria) \wedge ama(y, x) \rightarrow \neg ama(y, maria))$$

para qualquer atribuição a.

# Exemplo 1

$$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

# Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\quad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$$

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que:} \quad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A}: \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A}:
\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que: } \quad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A} : \\
&\qquad\qquad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A} : \\
&\qquad\qquad (d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

# Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que:} \quad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A}: \\
&\qquad \mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y) \\
&\iff \text{existe um } d_1 \in \mathcal{A} \text{ tal que para todo } d_2 \in \mathcal{A}: \\
&\qquad (d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff (1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

## Exemplo 1

$$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ ✓

## Exemplo 1

$$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1,2,3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x,y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x,y)$ ✓

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x,y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x,y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1,2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2,2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3,2) \in R^{\mathcal{M}}$ ✓

## Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ \checkmark$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y) \ \checkmark$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ $\checkmark$